PRESENTACIÓN

Los métodos racionales de aproximación adquirieron una especial relevancia a partir de los años sesenta. Los resultados científicos de esa época establecieron pautas en la teoría y, desde entonces, han estado influyendo cada vez más en las aplicaciones. Hoy, estos métodos se han convertido en una herramienta habitual en la solución de problemas singulares, muy frecuentes en las aplicaciones a la física y la ingeniería. La monografía de J. Illán está orientada hacia el estudio de la aproximación racional de funciones analíticas con distintos tipos de singularidades, y aborda la solución numérica de tres problemas representativos de la Matemática Numérica actual.

La enseñanza tradicional de la teoría de la aproximación y el análisis numérico, se ha centrado fundamentalmente en los esquemas polinomiales y en los aproximantes racionales de Padé. Actualmente es indispensable el conocimiento de nuevos métodos de aproximación que resulten menos afectados que los clásicos por la presencia de singularidades. En este contexto, la presente monografía puede ser de gran utilidad, ya que presenta el estudio teórico y experimental de métodos de aproximación racional a funciones con singularidades características, cuyo punto de partida está dado por los trabajos de Newman, Gonchar, Szabados, Turán, y Szüsz. Asimismo, incorpora resultados recientes de Saff, Levin, Bultheel y otros. Debe señalarse también el estudio teórico, hecho en el capítulo 4, de la conexión que existe entre la aproximación racional de funciones analíticas y el cálculo de integrales mediante fórmulas de cuadratura.

Estamos seguros que la clara exposición, la extensa y actualizada bibliografía, y los ejemplos numéricos, facilitarán al lector el estudio y la comprensión de los diferentes capítulos, tras una revisión del estado del arte, llevada a cabo magistralmente en el capítulo 1.

El autor, que ha sido profesor de las universidades de La Habana, Autónoma de Puebla y Vigo, ha recogido en esta monografía muchos de sus trabajos publicados anteriormente en revistas y actas de congresos. Es muy gratificante para mí que esta obra, que recoge la labor investigadora de muchos años, haya visto la luz durante su estancia como profesor visitante en el departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Vigo.

Eusebio Corbacho Rosas
Catedrático de Matemática Aplicada.
Director del Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Vigo.

Prefacio

Esta monografía trata el tema de la aproximación racional de funciones, y su conexión con las fórmulas de cuadratura. La he escrito con la intención de presentar de forma unificada algunos conceptos y resultados que se aplican al estudio de la característica constructiva de algunas clases de funciones analíticas, especialmente aquellas que tienen puntos singulares en la clausura del dominio.

El capítulo 1 es introductorio, y tiene el propósito de brindar al lector un panorama técnico y cultural que le facilite el tránsito a los restantes capítulos. De manera especial, he decidido incluir en la subsección 1.1.4 algunas ideas sobre el uso del criterio experto en el ámbito de la aproximación de funciones. La experticidad, llamada por algunos pragmática, es raramente abordada de forma directa en la literatura especializada.

Los capítulos 2 y 3 tratan el problema de aproximar funciones que admiten por tramos una prolongación analítica a los espacios H^p. Estos capítulos pueden ser de interés para estudiantes e investigadores interesados en el desarrollo de métodos numéricos para resolver problemas con singularidades.

Las fórmulas de cuadratura racional surgen naturalmente en la teoría de los espacios H^p cuando se consideran funcionales lineales con núcleo racional. También están asociadas a los aproximantes multipuntuales de Padé y a las integrales con peso racional variante. El estudio de estas fórmulas racionales de integración es uno de los principales objetivos de esta monografía. En el capítulo 2 aparecen vinculadas a la solución numérica de ecuaciones integrales con singularidades débiles; mientras que, en el capítulo 4, aparecen relacionadas con la aproximación racional de integrales de Cauchy.

La confección de este material está basada fundamentalmente en mi trabajo personal de investigación, y en la abundante producción científica que sobre estos temas ha tenido lugar durante los últimos cincuenta años. También me he apoyado en los cursos de posgrado que he impartido en diferentes centros universitarios. Con especial agrado menciono a los que tuvieron lugar en las universidades de la Habana (1989-90), Nacional Autónoma de Mexico (1991), Autónoma de Puebla (1992) y de Vigo (1999).

La extensión del teorema de Gonchar presentada en el capítulo 2, me fue sugerida por Vasil A. Popov durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Bulgaria en 1985. Este primer estudio de la técnica de Newman y Gonchar, me permitió abordar la solución de otros problemas de aproximación racional que el lector puede encontrar en los capítulos 2 y 3. El profesor Popov poseía al morir un valioso expediente científico que le ha permitido ocupar un lugar destacado en la historia moderna de la matemática. Sirva esta obra como un modesto homenaje a su memoria.

Es justo reconocer la influencia de Guillermo López Lagomasino en el contenido de este libro. Este profesor dirigió en el año 1973 nuestros primeros pasos en el trabajo investigativo. Algunas de sus ideas, trasmitidas al autor a principios de la década de los 80, aparecen rigurosamente desarrolladas en la sección 4.1.

Quiero dejar constancia de la ayuda brindada por el proyecto de la Junta de Galicia, XUGA 32103B98, que financió parcialmente la investigación cuyos resultados aparecen en la sección 3.3; y agradecer al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Vigo que ha hecho posible la aparición de esta edición. También deseo mencionar el cuidadoso trabajo hecho por los expertos encargados de la revisión de este material. Basándome en sus acertadas críticas y sugerencias, he mejorado notablemente la presentación y organización final de esta obra. Finalmente declaro que, gracias a la eficaz asesoría de Virgilio Rodríguez de Miguel, he podido editar mis notas con el sistema LaTeX.

Vigo, 30 de septiembre de 1999, J.R. Illán.

Índice general

Capítulo 1

La aproximación de funciones

Este capítulo es introductorio e informativo. Está estructurado en cuatro partes que a continuación se describen brevemente.

La sección 1.1 tiene como objetivo introducir al lector en los aspectos básicos de la teoría de la aproximación. Teniendo en cuenta el propósito general de este libro, en esta parte se hace especial énfasis en los métodos discretos de aproximación, y se incluye una subsección con los principales conceptos y resultados de la teoría de los espacios de Hardy.

La sección 1.2 trata de brindar una panorámica del acontecer investigativo desde los años 50 hasta nuestros días. En esta parte se ha tratado de compilar a los principales resultados teóricos que se relacionan de alguna manera con el contenido de los capítulos 2, 3 y 4. Por razones de espacio y debido a las limitaciones del autor, ha sido inevitable la omisión de trabajos cuya importancia es seguramente incuestionable.

Para presentar la conocida clasificación de los tres principales tipos de problemas que se tratan en la matemática numérica, y sus correspondientes estrategias de solución, ha sido incluida la sección 1.3. El matiz de esta parte está dado por la breve discusión que se hace acerca de las singularidades y de la influencia que ejercen estas últimas en el diseño de los métodos de solución.

La sección final 1.4 tiene la misión de ofrecer una descripción directa y detallada de los problemas que se tratan en los siguientes capítulos.

1.1. Temas básicos

Todo problema consta de datos e incógnitas. Resolver un problema significa obtener cierta información acerca de sus incógnitas. Generalmente sólo podemos conocer de forma parcial la solución debido a la complejidad del propio problema. De tal modo que si $\mathbf{x}$ es la solución exacta, basta conocer a $\overline{\mathbf{x}}$ que es una solución aproximada del problema. En general, utilizando pocas palabras, decimos que aproximar es sustituir para obtener información. En principio, $\overline{\mathbf{x}}$ puede ser construido a partir de los datos del problema, dentro de un ámbito teórico convenientemente escogido por el especialista.

La estrategia general para resolver un problema consiste en construir, paso a paso, aproximaciones $\mathbf{x}_1$,...,$\mathbf{x}_n$,...hasta que se produzca un punto $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k$ que contenga suficiente información acerca de $\mathbf{x}$. La cantidad de información que hemos podido obtener o, lo que es lo mismo, la calidad del producto final $\mathbf{x}_k$, se establece en términos de cierto criterio de error. El tipo de información que pretendemos extraer de la solución exacta del problema nosotros la modelizaremos mediante el concepto de pseudodistancia. Es precisamente el concepto de espacio pseudométrico, el cual incluye a los métodos discretos de solución, el terreno matemático donde desarrollaremos la teoría de la aproximación.

1.1.1. Métodos y esquemas de aproximación

Definición 1.1.1 *Sean* $\mathbf{E}$ *un conjunto no vacío y* $\mathbf{s} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *una aplicación que cumple*

1. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$.
2. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
3. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{s}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$.
4. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{s}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

La aplicación $\mathbf{s}$ *recibe el nombre de* **pseudométrica** *o* **pseudodistancia**, *y en tal caso el par* $(\mathbf{E}, \mathbf{s})$ *es llamado* **espacio pseudométrico**.

Si $\mathbf{s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ solamente cuando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{s}$ es una métrica o distancia y $(\mathbf{E},\mathbf{s})$ es un espacio métrico.

Mediante la relación de equivalencia $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si $\mathbf{s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ se obtiene de manera natural un espacio métrico en el cociente $\mathbf{E}/\sim$, cuya métrica está definida por $d([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = \mathbf{s}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, siendo $[\mathbf{x}]$ y $[\mathbf{y}]$ las clases de equivalencia correspondientes a los representantes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$.

El principal problema de la teoría de la aproximación podemos establecerlo de la siguiente forma.[1]

Problema principal de la teoría de la aproximación *Sean x y m dos puntos pertenecientes a un mismo espacio pseudométrico $(\mathbf{E},\mathbf{s})$. Supongamos además que $m = m_k$ depende de k parámetros escalares $(p_1,...,p_k) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$. Determinar el valor de $p_1,...,p_k$ de modo que $\rho_k = \mathbf{s}(x,m)$ sea mínimo.*

En lo que sigue plantearemos teóricamente la posibilidad de considerar que los aproximantes m_k, sin ser necesariamente óptimos respecto a la pseudométrica $\mathbf{s}$, verifiquen que $\lim_m \rho_m = 0$. La definición de límite en los espacios pseudométricos es el primer paso.

Definición 1.1.2 *Sea $(\mathbf{x}_n)$ una sucesión de elementos del espacio pseudométrico $(\mathbf{E},s)$, y sea $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Decimos que $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ si $\lim_n \mathbf{s}(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}) = 0$. Es decir, si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $n > N$ implica que $\mathbf{s}(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}) < \epsilon$.*

En la definición 1.1.2, el punto $\mathbf{x}$ es la solución exacta de un problema, y el término $\mathbf{x}_n$ es la información que podemos obtener sobre $\mathbf{x}$ con un coste no menor que N, y una calidad no peor que el número ϵ. La pseudodistancia $\mathbf{s}$ representa el tipo de información que contiene $\mathbf{x}_n$.

Es así que la definición 1.1.2 expresa que el límite de $\mathbf{x}_n$ es $\mathbf{x}$ si podemos obtener cualquier nivel información del tipo $\mathbf{s}$ acerca de $\mathbf{x}$, con cualquier calidad, sin preocuparnos del coste. Para el lector experimentado es evidente que semejante hazaña es imposible en la práctica, aún en el caso de problemas muy sencillos.

Definición 1.1.3 *Sean $(\mathbf{E},s)$ un espacio pseudométrico y $\{\mathbf{E}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbf{E}$ tal que*

1. $\overline{\mathbf{E}_n} \subset \mathbf{E}_{n+1}$,
2. $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n} = \mathbf{E}$.

Al trío $(\mathbf{E},\mathbf{s},\{\mathbf{E}_n\})$ le llamaremos **esquema de aproximación**.

[1]Achieser comienza su libro [1] con este planteamiento. Sólo hemos modificado la forma.

El diseño y las propiedades características de las sucesiones convergentes a un punto dado, son objeto de estudio en esta teoría. En lo que sigue escribiremos $\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_n$, y le asociaremos conceptualmente a un esquema de aproximación.

Definición 1.1.4 *Sea* $(\mathbf{E}, \mathbf{s}, \{\mathbf{E}_n\})$ *un esquema de aproximación. A una sucesión de operadores* $\mathbf{T}_n : D_n \subset \mathbf{E} \to \mathbf{E}_n$ *le llamaremos* **método de aproximación** *si al menos existe un* $\mathbf{x} \in \cap_n D_n$ *tal que* $\lim_n \mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Un dominio de convergencia para el método de aproximación $(\mathbf{T}_n)$ *es un conjunto* $D \subset \cap_n D_n$ *para el cual se cumple que* $\lim_n \mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x} \in D$.

El planteamiento formal de la definición 1.1.4 no se corresponde totalmente con lo que hacemos en la práctica. Frecuentemente el conjunto D está dado de antemano y se trata de construir el método de aproximación $(\mathbf{T}_n)$ para el cual D es un dominio de aproximación.

La definición 1.1.4 tiene como objetivo destacar algunos de los principales aspectos que rodean a la tarea de aproximar una incógnita. Verdaderamente pueden plantearse diversos problemas. El especialista puede partir de un punto particular $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, y entonces tratar de hallar una clase D que le contenga y sobre la cual actúen métodos eficientes $\mathbf{T}_n$.

El siguiente ejemplo muestra que los dominios D_n no son superfluos en la anterior definición 1.1.4.

Ejemplo 1.1.1 *Sea* $\mathbf{E} = C[-1, 1]$ *el espacio de las funciones reales y continuas en el intervalo* $[-1, 1]$, *con derivada hasta el orden* n. *Para* $f \in \mathbf{E}$ *definamos a* $\mathbf{T}_n$ *como el polinomio de Taylor de* f, *de grado* n, *en el punto* $\mathbf{x}_0 = 0$. *Es decir*

$$\mathbf{T}_n(f)(t) := f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}t + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n. \tag{1.1}$$

No toda función continua f *admite polinomio de Taylor para* $n \geq 1$. *Aquí podemos tomar a* D_n *como la clase de las funciones con derivada continua de orden* n. *Usualmente escribimos* $D_n = C^n[-1, 1]$. *El lector puede fácilmente comprobar que el conjunto* D *de las* $f \in \mathbf{E}$ *tales que* f *es analítica en* $U = \{z = x + iy;\ x^2/4 + y^2 < 1\}$ *es un dominio de convergencia para el método de aproximación (1.1).*

Definición 1.1.5 *Sean* $(\mathbf{E}, s)$ *espacio pseudométrico y* $M \subset \mathbf{E}$. *Dado* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}\backslash\overline{M}$, *el número* $\mathbf{s}(\mathbf{x}, M) = \inf_{m \in M} \mathbf{s}(\mathbf{x}, m)$ *es la mejor aproximación de* $\mathbf{x}$ *mediante elementos de* M.

Si existe $m(\mathbf{x}) \in M$ *tal que* $\mathbf{s}(\mathbf{x}, M) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, m(\mathbf{x}))$ *entonces* $m(\mathbf{x})$ *recibe el nombre de elemento de la mejor aproximación a* $\mathbf{x}$ *mediante* M.

Proposición 1.1.1 *Sea el esquema de aproximación* $(\mathbf{E}, \mathbf{s}, \{\mathbf{E}_n\})$. *Si para cada* $\mathbf{x} \in \mathbf{E} \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbf{E}_n}$, *y para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe un único* $\mathbf{x}_n \in \mathbf{E}_n$, *elemento de la mejor aproximación de* $\mathbf{x}$ *mediante* $\mathbf{E}_n$, *entonces* $\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_n$, *es un método de aproximación con dominio de convergencia* $D = \mathbf{E}$.

Demostración *Obviamente* $\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_n$ *está bien definido. Sólo hay que probar que converge para todo* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{n_0}$, *para un cierto* n_0, *entonces de la propia definición se tiene que* $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, *para* $n \geq n_0$, *y trivialmente* $\lim_n \mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Si $\mathbf{x} \notin \mathbf{E}_n$, *para cualquier* n, *entonces* $\mathbf{x} \in \mathbf{E} \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbf{E}_n}$. *Sea* $\mathbf{x}_n$ *el elemento de la mejor aproximación a* $\mathbf{x}$ *mediante* $\mathbf{E}_n$. *Entonces* $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$, *y por tanto existe* $\lim_n \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) = \lambda_0$. *El que* λ_0 *sea cero se desprende de la definición de esquema de aproximación.* ■

El diseño de un método de aproximación consiste en hacerle depender de un conjunto finito de parámetros $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,m_n}\}$ de tal modo que $m_{n+1} \geq m_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Es así que los tamaños de n y m_n contienen información relativa a la "complejidad"del método de aproximación.

La condición de linealidad se expresa en esta teoría a través del esquema de aproximación, del método de aproximación, o de la disposición que adoptan los parámetros en el modelo de los aproximantes. Si $\mathbf{E}$ es un espacio vectorial, entonces la linealidad puede estar dada por ser los $\mathbf{E}_n$ subespacios lineales. En tal caso diríamos que se trata de un esquema de aproximación lineal. Si además los operadores $\mathbf{T}_n$ del método de aproximación son lineales, entonces se trata de un método lineal. Finalmente, la linealidad del método de aproximación puede estar dada solamente por la disposición de los parámetros en la fórmula de los aproximantes.

El problema principal formulado en la página 4 no se reduce al cálculo de los parámetros p_i. Dado $M \subset \mathbf{E}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{E} \setminus \overline{M}$ hay tres problemas básicos de la teoría que son:

1. Existencia de un elemento $m(\mathbf{x})$ de la mejor aproximación a $\mathbf{x}$ mediante M.

2. Unicidad de $m(\mathbf{x})$.

3. Propiedades que caracterizan a $m(\mathbf{x})$.

El método de la mejor aproximación $m(\mathbf{x})$ es una referencia obligada para el teórico, pero presenta dificultades prácticas debido a su no linealidad.[2] No

[2] Incluso cuando está asociado a un esquema de aproximación lineal.

existe un método general que garantice obtener información numérica acerca de $s(\mathbf{x}, m(\mathbf{x}))$, o del propio $m(\mathbf{x})$, cualquiera sea la naturaleza del espacio pseudométrico. En las páginas 33-35 del libro de Rivlin [205], se trata el problema de calcular, en términos de pseudométricas uniformes, la mejor aproximación polinomial a funciones continuas. La técnica consiste en reducir el problema de $n+1$ parámetros[3] y m puntos en el soporte de la seminorma, a otro problema, numéricamente soluble, de $n+2$ puntos ($m \geq n+2$). Los casos $m = n+1, n+2$, tienen ambos solución directa en términos de un polinomio de interpolación de Lagrange.

La mejor aproximación polinomial de una función, es mucho más fácil de resolver numéricamente en el sentido mínimo-cuadrático, que en el caso uniforme.[4] Rivlin dedica el epígrafe 2.4 de su libro [205] a estimar la eficiencia relativa de la mejor aproximación polinomial y uniforme a una función f, respecto a la mejor aproximación polinomial de esta misma función en L^2.[5]

Sea $(C[a,b], \mathbf{s}, \{\mathbf{E}_n\})$ un esquema de aproximación, donde los $\mathbf{E}_n$ son subespacios lineales de dimensión finita n. Si $\mathbf{s}$ es una pseudométrica con soporte finito $Y = \{x_1, ..., x_m\}$, y $g_1, ..., g_n$ es una base de $\mathbf{E}_n$, el problema de calcular la mejor aproximación a una función continua f consiste en minimizar la función

$$\triangle(c_1, ..., c_n) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_i) - f(x_i) \right|.$$

Los algoritmos que permiten resolver el anterior problema de optimización están descritos en [63], donde además se demuestra que la solución minimax discreta converge a la correspondiente solución del caso continuo, cuando la densidad de Y tiende a cero.[6] Es decir, la solución del caso continuo puede ser obtenida como el límite -en un sentido adecuado- de una sucesión de soluciones de problemas discretos que, al menos teóricamente, son resolubles. El epígrafe 1.1.2 trata este tema, mientras que los algoritmos clásicos pueden verse en el capítulo 2 de [63]. Es oportuno señalar que los algoritmos de Remes constituyen una forma más directa de abordar la solución del problema sobre el continuo. La idea consiste en establecer una secuencia alternada de problemas discretos y no discretos, de manera tal que las soluciones de los segundos convergen a la solución del problema original.

[3] Polinomios de grado no mayor que n.

[4] Esta afirmación es válida para ambos casos: discreto y continuo.

[5] Teorema 2.2, página 61 de [205].

[6] Entendemos como caso continuo aquél para el cual $Y = [a,b]$. También se prueba que los mejores aproximantes discretos convergen a los aproximantes óptimos del caso continuo.

Ejemplo 1.1.2 *El esquema de aproximación polinomial.*

Consideremos al espacio de funciones continuas $\mathbf{E} = C[a,b]$*, provisto con la pseudométrica* $\sup_{x\in Y}|f(x) - g(x)|$*, donde* $Y \subset [a,b]$*;* $f, g \in C[a,b]$*; y el conjunto de los polinomios* $\mathbf{E}_n = \Pi_n$ *de grado no mayor que* n*,* $n \in \mathbb{N}$*. Este es un esquema de aproximación lineal, en el cual están definidos métodos lineales y no lineales de aproximación. Citemos un ejemplo de cada caso. Dado que para cualquier* $f \in \mathbf{E} = C[a,b]$ *existe y es único el mejor aproximante polinomial de grado no mayor que* n*, es posible considerar al método de aproximación óptimo del mejor aproximante de* $\mathbf{E}_n = \Pi_n$*, que es un método no lineal aunque sí es convergente para toda función continua* f*. Por otra parte, el operador de Bernstein*

$$\mathbf{T}_n(f) = (B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

es un ejemplo de método de aproximación polinomial lineal cuyo dominio de convergencia uniforme es $D = C[0,1]$*.*

Ejemplo 1.1.3 *El esquema de aproximación racional.*

Sea $F_{n,m}$ *el conjunto de las funciones racionales* $r_{n,m}$ *que se escriben de la siguiente forma*

$$r_{n,m}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}. \tag{1.2}$$

Consideremos al espacio $\mathbf{E} = C[a,b]$ *con la distancia uniforme sobre* $[a,b]$ *y a la clase de aproximantes* $\mathbf{E}_n := F_{n,n}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Este esquema de aproximación es no lineal pues los* $\mathbf{E}_n = F_{n,n}$ *no son subespacios. La presencia de parámetros en el denominador de las fracciones produce no linealidad. Sin embargo es posible definir métodos de aproximación racional cuyo cálculo tenga un planteamiento lineal. Bastaría considerar una clase de aproximantes racionales del tipo* $R_n(x) = p_n(x)/q(x)$*, con* q *fijo.*

Otra manera de tener vestigios de linealidad es considerando a $\mathbf{E} = A[a,b]$*, el espacio de las funciones analíticas en el intervalo* $[a,b]$*. El llamado aproximante de Padé* $[n,n](f)$*,* $f \in A[a,b]$*, puede ser calculado mediante un sistema lineal de ecuaciones, cuyos coeficientes son tomados del desarrollo en serie de potencias de la función aproximada.*[7]

El perenne problema de obtener representaciones de una función en términos de expresiones fácilmente calculables es un motivo que justifica el uso de las funciones racionales. Para explicarlo consideremos a $r \in F_{n,m}$*. Entonces,*

[7] La definición de aproximante de Padé puede ser vista en la página 52.

aplicando reiteradamente el algoritmo de Euclides, $r(x)$ puede ser finalmente representada como una fracción continua. Es decir

$$r(x) = P_1(x) + \cfrac{c_2}{P_2(x) + \cfrac{c_3}{P_3(x) + \ddots + \cfrac{c_k}{P_k(x)}}}. \tag{1.3}$$

De esta última forma $r(x)$ puede ser evaluado para cualquier x mediante no más de $\max\{n, m\}$ *operaciones aritméticas largas [63].*

Teniendo en cuenta la importancia teórica y práctica de la representación (1.3), ofrecemos a continuación el planteamiento formal de las fracciones continuas y la notación más usual en la literatura. La siguiente definición general aparece en [134] (ver también [177]).

Definición 1.1.6 *Una fracción continua es un par ordenado*

$$((\{a_n\}, \{b_n\}), \{f_n\}),$$

donde $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$ para todo k, y donde $\{f_n\}$ es una sucesión en el plano ampliado $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definida por

$$f_n = \mathfrak{F}_n(0), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

siendo $\mathfrak{F}_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de transformaciones

$$\mathfrak{F}_n(w) = \frac{A_n + A_{n-1}w}{B_n + B_{n-1}w}, \tag{1.4}$$

definida por la siguiente fórmula recurrente.

$$S_0(w) = s_0(w); \quad \mathfrak{F}_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

y las s_n están dadas por

$$s_0(w) = b_0 + w; \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \ n = 1, 2, 3, ...$$

Los números a_n, b_n reciben el nombre de elementos de la fracción continua, y f_n es llamado el enésimo aproximante.

Una fracción continua $((\{a_n\}, \{b_n\}), \{f_n\})$ también se denota por uno cualquiera de los siguientes símbolos.

$$b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \tag{1.5}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \underset{+}{} \frac{a_2}{b_2} \underset{+}{} \frac{a_3}{b_3} \underset{+}{} \cdots \tag{1.6}$$

Definición 1.1.7 *Decimos que una fracción continua*

$$((\{a_n\}, \{b_n\}), \{f_n\})$$

es convergente si la sucesión de aproximantes $\{f_n\}$ converge a un punto $f_0 \in \mathbb{C}$, y en tal caso decimos que la fracción continua tiene el valor f_0.

Los símbolos (1.5) y (1.6) son indistintamente utilizados para denotar a la fracción continua y a su límite.

Podemos distinguir entre las fracciones continuas finitas, es decir, aquellas para las cuales las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son finitas, y las infinitas en el caso contrario.[8]

A cada fracción continua $b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, le hacemos corresponder las sucesiones de números complejos $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ que conforman las fracciones lineales de (1.4) en la definición 1.1.6, y que están definidas por las siguientes ecuaciones lineales en diferencias.

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \tag{1.7}$$

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1.8}$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1.9}$$

Los números A_n y B_n reciben el nombre enésimo numerador y denominador de la fracción continua, respectivamente, y cumplen las siguientes propiedades.

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.10}$$

$$f_n = \mathcal{F}_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.11}$$

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.12}$$

A la ecuación (1.12) la conocemos por el nombre de fórmula determinante. Si consideramos que $a_n = a_n(z)$, $b_n = b_n(z)$ son polinomios complejos en la variable compleja z, podemos derivar la representación finita (1.3).

Las fracciones continuas están íntimamente conectadas con la determinación del problema de momentos siguiente. Sea $C = \{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números

[8] En inglés se utilizan también los términos **terminating** y **nonterminating**, respectivamente.

complejos. ¿Existe una función ψ, real, acotada y monótona creciente tal que para todo entero n se cumple que

$$c_n = \int_0^\infty (-t)^n d\psi(t)?$$

A la cuestión anterior se le llama “problema fuerte de momentos de Stieltjes 2 aparece completamente estudiada en [134]. Sobre la teoría general de momentos puede verse [215].

Finalicemos este epígrafe con las preguntas que generalmente nos hacemos cuando tenemos en proyecto utilizar un esquema o método de aproximación.

1. ¿Cuál es, teóricamente, la clase más amplia de funciones a la cual podemos aplicar un esquema o método de aproximación dado? y ¿para cuáles de estas funciones nuestro método podría ofrecer resultados numéricos no concordantes con la teoría?

2. ¿Podemos construir computacionalmente a nuestros aproximantes con una exactitud aceptable?

3. ¿Cuál es la velocidad teórica de convergencia?

4. ¿Cómo se corresponden la velocidad de convergencia teórica y los errores experimentales?

1.1.2. Aproximación discreta

Discretizar significa en matemática reemplazar conjuntos infinitos por finitos, o trasladar un problema desde espacios de dimensión infinita al espacio $\mathbb{R}^n$. En la sección 1.3 el lector puede encontrar una breve explicación acerca de los métodos o estrategias de solución- vía discretización- de los principales problemas de la Matemática Numérica. En dicho apartado apreciamos como una ecuación $Lx = y$, siendo x la incógnita, puede estar planteada en un espacio X de dimensión infinita, y ser resuelta mediante una sistema de ecuaciones con n incógnitas escalares.

En lo que sigue trataremos el problema de aproximar en un sentido discreto a una función real y continua f, definida sobre un intervalo $[a, b]$, mediante polinomios generalizados $p_n(x) = a_n g_n(x) + ... + a_1 g_1(x)$, siendo $g_k \in C[a, b]$, $1 \leq k \leq n$.[9]

La aproximación numérica de f, mediante polinomios, es un procedimiento que consiste en sustituir al intervalo $[a, b]$ por un subconjunto finito[10] del

[9] Hemos tomado como principal referencia a [63, 205].
[10] Teóricamente nos basta que $Y \subset X = [a, b]$.

mismo, que denotaremos por $Y_n = \{x_1, ..., x_n\}$. Ello significa que sólo calcularemos el mínimo de las distancias entre los números $f(x_k)$ y las expresiones paramétricas $p_n(x_k)$, $k = 1, ..., n$, aunque también nos interesa que las discrepancias entre la función f y la clase de los aproximantes en puntos $x \in [a, b]$, que no pertenecen a Y_n, no sobrepasen ciertos niveles. Parece razonable que si escogemos al conjunto Y_n de modo que "lleneçonvenientemente al intervalo $[a, b]$, entonces el resultado obtenido puede ser globalmente satisfactorio.

Siguiendo a Cheney [63] señalemos que hay dos tipos de errores en la aproximación discreta de f mediante polinomios generalizados. Uno de ellos fue señalado anteriormente. Se trata de la distancia entre f y p_n, fuera de Y_n. El segundo tipo de error se refiere a lo alejado que puede estar el aproximante discreto del aproximante óptimo sobre todo el intervalo, aún en el caso de que el primero esté cerca de la función f. Esta situación no es grave ya que dos aproximantes que estén alejados uno del otro, pueden estar ambos cerca de la función f, y por ende brindar buena información acerca de la misma.

Nos corresponde establecer en este punto el concepto de densidad de un conjunto. Lo podemos hacer de una manera suficientemente general. Para ello consideremos a un espacio métrico (X, d) cualquiera. Si $Y, Z \subset X$ son tales que $Y \cap Z \neq \emptyset$, entonces la densidad de Y sobre Z, estará dada por $|Y|_Z = \sup_{x\in Z} d(x, Y \cap Z)$. El caso particular $Z = X$, se denota simplemente por $|Y|$.

Una manera de medir o controlar el "llenado"del intervalo mediante los conjuntos discretos $Y \subset [a, b]$ es a través de la densidad de Y respecto a $X = [a, b]$.

Decimos que Y es "denso"si $|Y|$ es suficientemente pequeño. El ejemplo dado por los $n + 1$ puntos equidistantes $E_n = \{x_k = a + (b - a)k/n;\ k = 0, ..., n\}$ del intervalo $[a, b]$ es uno de los más sencillos e ilustrativos. Es fácil obtener que $|E_n| = (b - a)0{,}5/n$.

En este contexto es más conveniente usar pseudodistancias que provengan de seminormas. Una seminorma N sobre un espacio vectorial $\mathbf{E}$ es una aplicación real y positiva que cumple los siguientes axiomas.(11

1. $N(0_{\mathbf{E}}) = 0$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{E}$.
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, $x, y \in \mathbf{E}$.

Las seminormas $N(f)$ que aquí utilizamos son de la forma siguiente.

$$N(f) = \|f\|_Y := \sup_{y\in Y} |f(y)|.$$

[11] La notación $N(x)$ para las seminormas no será utilizada en lo sucesivo.

Luego $\|f\|_Y = \|f\|_\infty$ en caso de que Y sea denso en $[a, b]$. Observemos que en general, es posible que $\|f\|_Y = 0$ siendo $f \not\equiv 0$.

La norma del espacio $L_p = L_p^\mu[a, b]$ se denota por $\|\cdot\|_{L_p}$ o $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$.

El caso especial de la norma del espacio de Hardy en el disco unidad, definida en la subsección 1.1.6, se representa como $\|\cdot\|_p$.

La norma de la convergencia uniforme sobre $A \subset X$, con función de peso W, se representa de las siguientes formas

$$\sup_{x\in A} |W(x)f(x)| = \|f\|_{W,A} = \begin{cases} \|f\|_\infty & \text{si } W \equiv 1,\ A = X, \\ \\ \|f\|_A & \text{si } W \equiv 1. \end{cases}$$

Al lector interesado en los problemas de aproximación en espacios normados le sugerimos que consulte el libro de Singer [216]. Este material es casi de obligada referencia cuando se consideran problemas de existencia y unicidad de la mejor aproximación de un vector de un espacio normado, utilizando para ello elementos de un subespacio lineal dado.

Un resultado básico cuya demostración aparece en [63], es el siguiente.(12

Lema 1.1.1 *Sea $g_k \in C[a, b]$, $k = 1, ..., n$. Para cada $\alpha > 1$ corresponde un $\delta > 0$ tal que $\|p\|_X < \alpha\|p\|_Y$ para cualquier polinomio generalizado $p = \sum c_i g_i$ y para todos los Y cumpliendo $|Y| < \delta$.*

El anterior lema 1.1.1, que puede establecerse considerando a $C(X)$, siendo X un conjunto compacto cualquiera, significa que si $|Y|$ es suficientemente pequeño, entonces $\|\cdot\|_Y$ actúa sobre el espacio generado por los g_k como una norma.

Antes de continuar este tema señalemos que en la teoría de la aproximación de funciones es muy común y necesario el uso de módulos de continuidad y de suavidad. Se trata de funciones reales de una variable escalar positiva que permiten evaluar el nivel de suavidad de una función no necesariamente diferenciable.(13 El módulo de continuidad uniforme $\omega(f, \delta)$ de una función real f definida sobre un espacio métrico (E, d), es una de las más conocidas maneras de medir la relación existente entre los incrementos de la función y su variable independiente. Se define de la siguiente forma.

$$\omega(\delta) = \omega(f, \delta) := \sup_{x,y\in E, d(x,y)<\delta} |f(x) - f(y)|, \tag{1.13}$$

siendo $\delta > 0$.

Si f es uniformemente continua el módulo (1.13) cumple los siguientes axio-

[12] Ver también la obra de Rivlin [205], considerada por algunos una de las mejores introducciones a esta teoría.
[13] La diferenciabilidad es una condición demasiado exigente para los intereses generales de la teoría.

mas.

1. $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$;
2. ω es no negativa y no decreciente sobre $\mathbb{R}_+$;
3. ω es subaditiva: $\omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$;
4. ω es continua en $\mathbb{R}_+$.

En general decimos que una función ω definida sobre $\mathbb{R}_+$ que cumpla las propiedades (1)-(4) es un módulo de continuidad. La desigualdad

$$|\omega(\delta_1 + \delta_2) - \omega(\delta_1)| \le \omega(\delta_2),$$

expresa que una tal función es su propio módulo de continuidad, lo cual justifica el nombre.

En [68] pueden verse las definiciones de los módulos de suavidad en términos de diferencias de orden superior. Una generalización a los espacios de Banach de los módulos de suavidad con diferencias de orden superior aparece en [180].

Señalemos que mediante estos módulos de suavidad se expresan importantes propiedades estructurales de las funciones, generalmente más débiles que la condición de derivabilidad.

En lo sucesivo la cadena de símbolos $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ se leerá como "(a_n) es o grande de (b_n)", lo cual significa, por definición, que existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| \le M|b_n|$, a partir de un cierto n_0.

Si "(a_n) es o grande de (b_n) 2"(b_n) es o grande de (a_n)", escribimos $a_n \asymp b_n$.

El lector podrá deducir fácilmente de las definiciones que para $1 \ge \alpha > 0$ se tiene que $\omega(f, I, \delta) = \mathcal{O}(\delta^\alpha)$ si y sólo si f es de la clase Lipschitz de orden α.

En la demostración del lema 1.1.1 interviene también un tipo de módulo conjunto de continuidad $\Omega(\delta)$, relativo a las n funciones g_k.

$$\Omega(\delta) := \max_{1\le i\le n} \max_{|x-y|\le\delta} |g_i(x) - g_i(y)|.$$

Una de las propiedades más notables del anterior módulo conjunto de continuidad es que $\lim_{\delta\to 0} \Omega(\delta) = 0$ si I es un compacto.(14

En el siguiente lema, en el cual participan $\Omega(\delta)$ y $\omega(f, I, \delta)$, se expresa que las discrepancias sobre conjuntos discretos están bajo control cuando éstos son aumentados de una manera aceptablemente uniforme.

Lema 1.1.2 *Sean $f \in C[a, b]$ y $X = [a, b]$. Para todo polinomio generalizado $P = \sum c_i g_i$ las seminormas $\|f - P\|_Y$ convergen a $\|f - P\|_X$ si $|Y| < \delta \to 0$ de*

[14] También es cierto en el caso general en que I es un espacio métrico compacto cualquiera.

acuerdo con la siguiente desigualdad

$$\|f-P\|_X < \|f-P\|_Y + \omega(f,X,\delta) + \beta\|P\|_X\Omega(\delta),$$

donde $\beta > 0$ es una constante que no depende de f ni de P.

La demostración del lema 1.1.2, que puede verse en [63], se establece a partir del lema 1.1.1.

Sea P_Y un polinomio generalizado de la mejor aproximación a la función continua f respecto a la seminorma $\|\cdot\|_Y$. Un resultado particularmente relevante es el siguiente.

Teorema 1.1.1

$$\lim_{|Y|\to 0} \|f-P_Y\|_X = \|f-P_X\|_X.$$

Si seleccionamos una sucesión de partes Y_n de X, podemos considerar al método de aproximación discreta de los aproximantes óptimos P_{Y_n}, $n \in \mathbb{N}$, respecto a cierta función continua f. En tal caso se tiene el siguiente

Teorema 1.1.2 *Existe una sucesión de conjuntos finitos $Y_n \subset X$ de modo que los polinomios generalizados P_{Y_n} de la mejor aproximación a f sobre Y_n, convergen uniformemente a f (sobre X) cuando $n \to \infty$.*

Si algo nos queda claro en este momento, es que los conjuntos discretos Y_n del teorema 1.1.2, deben tener densidad infinitesimal.

Observemos que en la teoría anterior no se exige la unicidad del mejor aproximante. En caso de que se garantice la unicidad del mejor aproximante P_Y respecto a la función f, como es el caso de los polinomios algebraicos clásicos $g_k(x) = x^k$, puede asegurarse que P_Y converge a P_X cuando $|Y| \to 0$, lo cual concierne al segundo tipo de error mencionado anteriormente.(15

1.1.3. Interpolación de funciones

Una parte considerable de los métodos numéricos tradicionales, ha sido establecida en términos de la existencia de un polinomio cuyos valores, en cierto conjunto de puntos del dominio, están dados de antemano. La interpolación de funciones es parte de la teoría de aproximación sobre conjuntos discretos, pero tiene en sí misma una importancia especial. El problema básico que aquí se plantea, es el referente a la existencia y unicidad de una función p de cierta clase K, tal que p (y algunas de sus derivadas) toman valores prefijados en un conjunto de puntos Y, finito o numerable. En la sección 1.1.6 el lector puede

[15] Ver el teorema 3 de la página 87 de [63].

apreciar cómo se establece este problema en el ámbito de los espacios H^p. Otra gran clase de problemas es la que concierne al comportamiento asintótico del interpolante p, cuando tiende al infinito el número de los parámetros que le definen. Este epígrafe tiene el único propósito de presentar algunos aspectos básicos de la interpolación mediante polinomios y funciones racionales.

Existen muchas obras dedicadas a este tema, pero las referencias bibliográficas fundamentales que hemos utilizado en esta sección son los libros de Achiezer [1], Cheney [63], Rivlin [205] y DeVore-Lorentz [68].

Los polinomios de Lagrange y Hermite.

La interpolación mediante polinomios es posiblemente la parte más antigua de la teoría de aproximación. Levin y Shekhtman [147] nos aseguran que se trata de una tarea que combina el uso de las técnicas del ajuste de curvas, con elementos de riesgo, inseguridad y estímulo intelectual. En las líneas que siguen vamos a plantear el correspondiente problema de interpolación polinomial, y mencionaremos algunas de sus más relevantes peculiaridades.

Sean $\{x_0, ..., x_n\}$, $n+1$ puntos diferentes del intervalo $[a,b]$, y c_0, $c_1, ...$, c_n, $n+1$ números reales. Consideremos los polinomios l_k definidos por la siguiente fórmula.

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, \tag{1.14}$$

donde $k = 0, ..., n$.

Entonces el único polinomio p de grado $\leq n$ que cumple $p(x_k) = c_k$, $1 \leq k \leq n$, está dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k l_k(x). \tag{1.15}$$

A la función (1.15) se le llama *polinomio de Lagrange* de grado n que interpola a los números c_k en los puntos x_k. Si los puntos c_k son los valores de una función dada f, decimos que (1.15) interpola a f.

La docilidad de los polinomios es relativa. Tener un polinomio interpolante tiene un precio que no siempre estamos dispuestos a pagar. Para poder apreciar el sentido de estas palabras consideremos una función real f definida sobre el intervalo $[a,b]$, y pongamos $c_k = f(x_k)$. Se trata ahora de hacer coincidir un polinomio $p_n(f)$ de grado $\leq n$ con la función f en los puntos x_k, $1 \leq k \leq n$. ¿Qué podemos asegurar acerca de las discrepancias entre $f(x)$ y $p_n(f)(x)$ siendo $x \neq x_k$, $1 \leq k \leq n$? La respuesta es categórica. En general no hay garantías de que éstas estén siquiera acotadas. El siguiente resultado negativo apareció publicado en 1914.

Teorema de Faber *Para cualquiera sea la sucesión de conjuntos interpolantes*

$$-1 \leq x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leq 1, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.16}$$

existe una función $f \in C[-1,1]$ para la cual los polinomios de interpolación $p_n(f)$ no convergen uniformemente a f.

No es difícil encontrar ejemplos de funciones para las cuales se aprecia claramente el comportamiento fuertemente oscilante de los polinomios de interpolación, aún para valores pequeños del parámetro n. El lector puede considerar nodos equidistantes aplicados al notable ejemplo de la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, $-5 \leq x \leq 5$, estudiada por Runge [207] en 1901.

En general, no es aconsejable utilizar la interpolación polinomial para extraer información a una nube de datos experimentales, porque ello significa introducir un ruido adicional a nuestras conclusiones. No obstante, hay una variante técnica más ortodoxa que es utilizada con frecuencia, llamada interpolación lineal. Esta última consiste en el cálculo de la recta que pasa por dos puntos consecutivos de una muestra relativamente pequeña.[16]

El siguiente resultado expresa que no existen conjuntos de interpolación (1.16) privilegiados.

Teorema de Erdös-Vertesi [76]
Cualquiera sea la sucesión de conjuntos interpolantes (1.16) podemos hallar una función $f \in C[-1,1]$ cuya sucesión asociada de polinomios de interpolación de Lagrange $(p_n(f))$ diverge casi donde quiera sobre $[-1,1]$.

Para encontrar resultados favorables de convergencia tenemos que acudir a las funciones analíticas y a cierto tipo de nodos de interpolación. El siguiente resultado está demostrado en [68].

Teorema 1.1.3 *Sea la sucesión de conjuntos de interpolación $t_k^{(n)}$ definida por*

$$t_k^{(n)} = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \quad k = 1, ..., n. \tag{1.17}$$

Sea E_ρ, $\rho > 1$, la elipse descrita por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})\cos\phi, \quad y = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1})\sin\phi,$$

[16] Este método de interpolación por poligonales consiste en considerar el esquema a tramos de los splines de tipo uno, con el cual se eliminan las oscilaciones internodales.

y sea f analítica sobre y dentro de E_ρ. Entonces $(p_n(f)(z))$ converge uniformemente a $f(z)$ sobre E_ρ.

Los conjuntos (1.17), llamados nodos de Chebyshev, tienen otras interesantes propiedades interpolatorias que el lector puede encontrar en cualquiera de los libros referidos.

Sea $\mathfrak{L}_n(f)$ el polinomio de Lagrange de la función $f \in C[a,b]$, asociado a una tabla cualquiera de nodos. El operador $\mathfrak{L}_n$ está definido sobre $C[a,b]$ y tiene los siguientes atributos.

1. El rango o imagen de $\mathfrak{L}_n$ es el subespacio lineal Π_n.
2. $\mathfrak{L}_n$ es idempotente. Es decir, $\mathfrak{L}_n^2 = \mathfrak{L}_n$.
3. $\mathfrak{L}_n$ es lineal y continuo.

La cuarta propiedad que ha resultado excluida es $\lim_n \mathfrak{L}_n(f) = f$, para toda $f \in C[a,b]$, lo que configura un resultado general dentro de la teoría de Kharshiladze-Lozinski que el lector puede ver en [63].

Podemos establecer una condición suficiente de convergencia en la que participan las llamadas constantes de Lebesgue $\|\mathfrak{L}_n\|$. Su formulación será expresada de una forma más general para una sucesión cualquiera de operadores L_n lineales con las mismas propiedades que $\mathfrak{L}_n$, y con rango G_n.

Teorema 1.1.4 *Sea $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$ una secuencia de subespacios de dimensión finita de $C[a,b]$, y L_n una sucesión de operadores lineales y continuos cumpliendo las siguientes propiedades: $L_n^2 = L_n$, $L_n(C[a,b]) = G_n$. Para que $\lim_n L_(f) = f$ para toda $f \in C[a,b]$, es suficiente que*

$$\lim \|L_n\| d(f, G_n) = 0.$$

Demostración *La demostración del anterior teorema es una consecuencia de varias desigualdades fáciles de obtener. Sea $g_n \in G_n$ un elemento cualquiera de la mejor aproximación de f mediante G_n. Entonces*

$$\|L_n(f) - f\| = \|L_n(f - g_n) + (g_n - f)\|$$
$$\leq \|L_n\| \, \|f - g_n\| + \|g_n - f\| \leq 2\|L_n\| \, \|f - g_n\| \to 0.$$

■

El teorema 1.1.4 nos dice que los polinomios de Lagrange $\mathfrak{L}_n(f)$ convergen uniformemente a $f \in C[a,b]$ siempre que f pueda ser “rápidamente aproximada” mediante polinomios. De un resultado como el teorema 1.1.4 surge naturalmente la necesidad de estudiar el comportamiento asintótico de las constantes de

Lebesgue, que abordaremos en la subsección 1.1.3 mencionando algunos resultados de la teoría general.

En la teoría clásica, el polinomio de interpolación de Hermite corresponde al caso en que nos interesa prefijar los valores de algunas derivadas. En [63] puede verse esta versión existencial del polinomio de Hermite.

Teorema 1.1.5 *Existe un único polinomio* Π *de grado* $\leq 2n-1$ *tal que* Π *y su derivada* Π' *toman valores prescritos en* n *puntos.*

Para funciones analíticas tenemos una representación integral del polinomio de interpolación de Hermite.

Sea f una función analítica en un recinto D del plano complejo, y sean z_1, z_2,...,z_m, m puntos de D. Supongamos que además hemos seleccionado m números naturales α_1, α_2,...,α_m, con $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = n \geq m$.

Podemos construir un polinomio $\Pi(z)$ del menor grado posible, que satisfaga las condiciones

$$\Pi(z_j) = f(z_j),\ ...,\ \Pi^{(\alpha_j-1)}(z_j) = f^{(\alpha_j-1)}(z_j),\ \ (j = 1, 2, ..., m).$$

Este polinomio Π puede expresarse de la forma siguiente (ver [163])

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{\omega(s)}\frac{\omega(s)-\omega(z)}{s-z}ds, \tag{1.18}$$

donde γ es una curva rectificable de Jordan cualquiera, situada dentro del dominio D, junto con su interior, de modo que los puntos z_k le sean interiores, y ω está dada por

$$\omega(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{\alpha_k}.$$

El polinomio de Taylor es un ejemplo de polinomio de interpolación de Hermite.

Interpolación de tipo Lagrange generalizada

Una forma de tratar de una vez a ambos métodos de interpolación polinomial, el de Lagrange y el de Hermite, es mediante la consideración de la matriz triangular $X = \{-1 \leq x_{n,n} < ... < x_{n,2} < x_{n,1} \leq 1 |\ n = 1, 2...\}$, y de los polinomios fundamentales $A_{j,k} = A_{j,k}(X)$, de grado a lo más $nm-1$, que satisfacen las siguientes condiciones.

$$A_{j,k}^{(p)}(x_{n,q}) = \delta_{j,p}\delta_{k,q},\ p, j = 0, 1, ..., m-1,\ q, k = 1, 2, ..., n.$$

La interpolación de Hermite para $f \in C^{m-1}[-1,1]$ está dada por

$$H_{n,m}(X,f,x) := \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(x_{n,k})A_{j,k}(x). \tag{1.19}$$

Si $m = 1$, es decir, si $f \in C[-1,1]$, entonces (1.19) es el polinomio de interpolación de Lagrange de f. En general se dice que $H_{n,m}$ es de interpolación de tipo Lagrange si m es impar.

En un trabajo publicado en 1961 Erdös [77] nos muestra que para cualquier tabla de nodos X existe una constante positiva c tal que

$$\|\mathfrak{L}_n\| = \|H_{n,1}(X)\| > (2/\pi)\log\, n - c. \tag{1.20}$$

Si consideramos a las raíces de los polinomios de Chebyshev

$$T_n = \left\{ x_{n,k} = -\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right\},\ k = 1,...,n;$$

encontramos que las constantes de Lebesgue asociadas a los mismos satisfacen la siguiente desigualdad[(17]

$$\|H_{n,1}(T_n)\| < \frac{2}{\pi}\log n + 4. \tag{1.21}$$

El estimado (1.21) nos presenta a la tabla $\{T_n\}$ como apropiada para la tarea de interpolar funciones continuas. Sin embargo, T_n no es la selección óptima ya que Luttman y Rivlin demostraron que existe X tal que $\|H_{n,1}(X)\| < \|H_{n,1}(T_n)\|$, $n \geq 1$.

En [205] puede verse que si E es la tabla de nodos equidistantes entonces

$$\|H_{2n,1}(E)\| > K_1(\sqrt{3/2})^{2n},\ \ n \geq 2,$$

lo cual sitúa a este esquema uniforme en clara desventaja si tenemos en cuenta las expectativas que se derivan de (1.20) y (1.21).

En el caso general tenemos el siguiente teorema de tipo Erdös, probado por Szabados.

Teorema 1.1.6 *([226], teorema 1)*
Si m es impar entonces cualquiera sea la tabla X se tiene que

$$\|H_{n,m}(X)\| = \|\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}|A_{j,k}|\|_\infty \geq c\log n. \tag{1.22}$$

[17]Ver la demostración en [205]).

Los tres teoremas siguientes fueron demostrados por Y. G. Shi [213], para extender la teoría que Erdös y Turán [74] hicieron para el caso $m = 1$.

Teorema 1.1.7 *([213], teorema 1)*
Sea m un entero impar y[18]

$$\|H_{n,m}(X)\| \sim n^{\delta},$$

$0 < \delta < 1$. *Si* $\delta < \gamma \leq 1$, *entonces*

$$\lim \|H_{n,m}(X, f) - f\|_{\infty} = 0,$$

se satisface para toda función $f \in Lip_{\gamma}$.

A continuación se utiliza el concepto de límite superior, definido en la página 27.

Teorema 1.1.8 *([213], teorema 2)*
Sea m un entero impar y

$$\|H_{n,m}(X)\| \sim n^{\delta},$$

$0 < \delta < 1$. *Si* γ *satisface la condición*

$$0 < \gamma < \frac{m\delta}{\delta + 2m}, \tag{1.23}$$

entonces existe una función $f \in Lip_{\gamma}$ *tal que*

$$\limsup_{n} \|H_{n,m}(X, f) - f\|_{\infty} > 0.$$

Teorema 1.1.9 *([213], teorema 3)*
Sea m un entero impar. Si

$$\frac{(2m-1)\delta}{\delta + 4m - 2} < \gamma < \delta < 1, \tag{1.24}$$

entonces existe una matriz $X = Y_1$ *tal que*

$$\|H_{n,m}(Y_1)\| \sim n^{\delta},$$

y además,

$$\lim_{n} \|H_{n,m}(Y_1, f) - f\|_{\infty} = 0,$$

se satisface para toda $f \in Lip_{\gamma}$.

Por otra parte, si $0 < \delta < 1$ *entonces existe una matriz* $X = Y_2$ *tal que*

$$\|H_{n,m}(Y_2)\| \sim n^{\delta},$$

[18] Ver (1.22).

y una $f \in Lip_\delta$ tal que

$$\limsup_n \|H_{n,m}(Y_2, f) - f\|_\infty > 0.$$

Para $m > 1$, hay una interrogante para los valores de γ en el teorema 1.1.8 y en la primera parte del teorema 1.1.9. ¿Qué ocurre cuándo γ verifica

$$\frac{m\delta}{\delta + 2m} < \gamma \leq \frac{(2m-1)\delta}{\delta + 4m - 2}?$$

Una conjetura de Shi es que el teorema 1.1.9 es también cierto para estos valores de γ.

Otros resultados menos recientes sobre la teoría de interpolación polinomial pueden ser vistos en el capítulo 4 de [68] (páginas 117-120). En [47] puede verse cómo se utiliza el enfoque numérico para desaprobar una conjetura hecha en 1994 por Erdös, Szabados, Varma y Vertesi, referente a un problema de interpolación.

Interpolación racional.

El problema que ahora planteamos tiene similitudes e importantes diferencias con la interpolación polinomial. Dadas las dos colecciones finitas de números $\{f_1, ..., f_k\}$ y $\{x_1, ..., x_k\}$, se trata de determinar una función racional $r \in F_{n,m}$, $k = n + m + 1$, tal que se cumplan

$$r(x_i) = f_i, \quad i = 1, ..., k. \tag{1.25}$$

Teniendo en cuenta la expresión (1.2) de $r(x)$ concluimos que de (1.25) se deriva el siguiente sistema de k ecuaciones lineales con $k + 1$ parámetros.

$$a_0 + a_1 x_i + ... + a_n x_i^n = f_i(b_0 + b_1 x_i + ... + b_m x_i^m). \tag{1.26}$$

El grado de libertad del sistema (1.26) se consume en el cociente de modo que en caso de tener (1.25) una solución, esta es única.

En caso de que encontremos una solución $r \in F_{\nu,\mu}$, siendo $\mu + \nu < k - 1$, y $\mu \leq m$, $\nu \leq n$, entonces decimos que el conjunto (x_i, f_i) es una configuración degenerada.

En [205] aparece este ejemplo ilustrativo de que el problema (1.25) está mal planteado en general.

Ejemplo 1.1.4 *Sean $f_1 = f_2 \neq f_3$. Entonces no existe $r \in F_{1,1}$ tal que (1.25) se satisfaga.*

Los puntos (x_i, f_i) para los cuales una solución de (1.26) no es solución de (1.25), reciben el nombre de *puntos inalcanzables*. Es relativamente simple comprobar que en tal caso se cumple que x_i es cero común de los polinomios numerador y denominador de r.

Hasta aquí el lector habrá podido convencerse de las dificultades que aparecen en la interpolación racional, que no estaban presentes en el caso polinomial. En [205] podemos encontrar algo más acerca de los puntos inalcanzables y de las configuraciones degeneradas. Nosotros no nos extenderemos mucho más. Terminaremos este subepígrafe con el planteamiento y solución del problema de interpolar funciones analíticas mediante funciones racionales con polos prefijados, tal como está planteado en el capítulo 2.

Verdaderamente el problema de resolver (1.25), fijando de antemano los polos de $r(x)$, es similar al correspondiente polinomial, de modo que la existencia y unicidad de la solución está garantizada. Además, la expresión (1.18) es también válida para el caso en que $\omega(x)$ sea una función racional en lugar de un polinomio. Diremos entonces que es posible hallar la función racional, cuyos polos están prefijados, e interpola a la función analítica f en los puntos z_j, con multiplicidades α_i. Sólo exigiremos que la curva γ rodee a los puntos z_i, y que los polos estén situados en el exterior de esta curva.

El uso de las funciones racionales como interpolantes se ha consolidado en las últimas décadas del siglo XX. En [20, 167, 236] pueden verse algunos diseños de esquemas lineales de interpolación racional, mediante los cuales se obtienen resultados de mucho interés que trascienden el ámbito de los métodos tradicionales.

La sección 7 del capítulo 3 de [63] está dedicada a estudiar la aproximación discreta de funciones continuas mediante polinomios algebraicos de grado $\leq n$. En ella el lector podrá apreciar la relación que existe entre la *forma* de la distribución Y, y el orden de convergencia del aproximante óptimo y discreto P_Y de la función f. Este tipo de resultado teórico y nuestra propia experiencia, nos llevan a conclusiones como la siguiente: *el uso de distribuciones no uniformes, con cierta tendencia de sus puntos a agruparse en los extremos del intervalo, debe producir aproximaciones discretas a f más eficientes que aquellas correspondientes a distribuciones uniformes.*

El anterior enunciado, basado una parte en resultados científicos y la otra en resultados prácticos, nos introduce en el polémico tema de la pragmática, que abordaremos en la siguiente sección de una manera general.

1.1.4. Valoración experta de los métodos de aproximación

La experiencia es la base semi-científica en la que se apoyan los especialistas de todas las ramas del saber. Hay interrogantes para las cuales los manuales y los teoremas no tienen respuesta. Por ello es necesaria la intervención de un experto, es decir, un especialista que ha logrado acumular una gran experiencia profesional, y puede tomar decisiones *parcialmente basadas en la metodología y la ciencia*. La tercera componente que nutre al trabajo profesional es lo que aquí llamaremos *pragmática*. Esta vertiente subjetiva del trabajo profesional se organiza y presenta en la forma de *principios*. Es decir, enunciados metalingüísticos mediante los cuales el personal técnico establece expectativas, sugiere o recomienda líneas de acción, hace un resumen de experiencia, etc. En contra de la opinión generalizada ocurre que el matemático no es una excepción en cuanto al uso de la pragmática.[19] No importa si se trata de la teoría o de las aplicaciones.

En las siguientes líneas trataremos el tema de la experticidad o pragmática en la teoría de la aproximación.

Generalidad, eficiencia y complejidad.

La *generalidad* de un método de aproximación no sólo la expresamos en términos de la relativa "extensión" de su dominio de convergencia, sino también por el grado de afinidad teórica que podamos establecer entre las propiedades de ambos: los aproximantes y los aproximados. Es así que la generalidad de un método puede ser considerada excesiva si al dominio de convergencia pertenecen funciones cuya estructura es *muy diferente* de la que en común poseen los aproximantes. Obviamente la generalidad, como atributo de los métodos de aproximación, tiene un carácter pragmático.

Otras dos propiedades de los métodos de aproximación con características pragmáticas son la *eficiencia* y la *complejidad*. Por eficiencia de un método de aproximación entendemos las relaciones que podamos establecer entre el error del propio método y el número de parámetros que definen al aproximante. Frecuentemente medimos la eficiencia de un método de aproximación utilizando para ello estimados del error $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. El estimado o acotación del error podemos representarlo abreviadamente de la siguiente forma

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) = \mathcal{O}(\rho_n), \tag{1.27}$$

donde ρ_n tiende a cero cuando n tiende al infinito, y contiene menos información acerca del límite x y del aproximante x_n que el error exacto $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. El estudio

[19] Ver [208] y la página 41.

del comportamiento asintótico de $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$ como función del parámetro n, a través del estimado (1.27), es uno de los principales temas de estudio de la teoría. La obtención de ρ_n se basa siempre en los datos D del problema cuya solución es el punto x. Los analistas numéricos distinguen dos casos:

1. $\rho_n = \rho_n(D)$,

2. $\rho_n = \rho_n(D, x, x_n)$,

En ambos se hace uso efectivo de los datos del problema. Sin embargo, el caso (1) indica que éste se obtuvo sin conocimiento previo de los resultados que queremos obtener. Por otro lado, la notación utilizada en el estimado (2), indica que se está utilizando información acerca de las incógnitas o del método de solución. El caso 1 recibe el nombre de estimado a priori, mientras que el caso 2 se denomina estimado a posteriori.

En análisis numérico es más importante hacer explícito el estimado superior del error escribiéndolo en los siguientes términos

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq M\,\rho_n, \tag{1.28}$$

donde M es una constante positiva perfectamente determinada.(20 Un requisito indispensable es que (1.28) sea válido para valores pequeños de n. El número M nos da la medida de cuánto podemos explicar el error $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$ basándonos en ρ_n. Sin embargo, no parece haber un acuerdo general en cuanto a decidir cuándo M es una *buena* o *mala* constante. Lo cierto es que generalmente $M > 1$ y que para valores muy alejados del número uno ello puede representar un problema mal acondicionado, relativo al mayorante ρ_n, si se comprueba que el número M es el mejor posible. También es lícito adoptar una nomenclatura respecto al valor que aproximadamente debe tener el cociente que a continuación se muestra.

$$C_n = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)}{M\,\rho_n}.$$

Digamos, sin intenciones de sentar pautas, que si $C_n > 0{,}5$ para valores pequeños de n, entonces el estimado (1.28) es *realista*. En cualquier otro caso es *pesimista*.

La complejidad es una noción más cercana a la realidad computacional, y se expresa en una primera fase atendiendo al número de parámetros que intervienen en la fórmula y a las características de esta última.(21 La fórmula es lo

[20] Decimos que M es constante porque no depende de n. Sin embargo, en general depende de otros parámetros. Las constantes absolutas en un estimado puntual, pueden significar una considerable pérdida de información.

[21] La complejidad puede ser transparente al teórico, y decisiva para el analista numérico.

que define a los aproximantes $\mathbf{T}_n(x)$ como función de los parámetros A_n. Teniendo en cuenta que no existe una correspondencia uno a uno entre fórmulas matemáticas y algoritmos, la formulación exacta de un método de aproximación puede convertirse en una referencia engañosa respecto al verdadero nivel de complejidad. En el libro de Burden [58], sección 9.3, aparece una discusión acerca de los métodos cuasi-Newton, que expresa excelentemente cuál es la relación que puede existir entre la velocidad teórica y la verdadera complejidad de un método, cuando éste es expresado en términos de rutinas.

El experto puede hacer conjeturas acerca del comportamiento de cierto método de aproximación utilizando recursos pragmáticos como los anteriormente mencionados, basándose además en que estos están relacionados entre sí. Es así que un método de aproximación muy general no debe ser suficientemente eficiente sobre las subclases más afines teóricamente. Por ejemplo, el operador de Bernstein converge para toda función continua. Es decir, converge para "demasiadas"funciones. Ello explica que aún siendo éste un método de aproximación polinomial sea relativamente lento aproximando a un polinomio tan sencillo como $p(x) = x^2$. En efecto, $\|B_n(p) - p\|_\infty = 1/4n$.

En general se sabe que el orden de saturación de los polinomios de Bernstein es $x(1-x)/n$, y que la clase de saturación es el espacio de Sobolev W^2_∞, definido como es usual por[22]

$$W^2_\infty = \{f \in C^{(1)}[-1,1];\ f^{(1)}\,\text{abs. cont.},\ f^{(2)} \in L^\infty[-1,1]\}.$$

En particular, tenemos que $B_n(f,x) - f(x)$ no converge a cero mejor que $1/n$, para cualquier $f \in C^2[0,1]$.

La *especificidad* de un método de aproximación, que aquí asumimos como noción opuesta a la generalidad, debe producir buenos resultados si utilizamos ventajosamente la afinidad estructural que debe existir entre aproximantes y aproximados. Estas ventajas deben expresarse en términos de mayor eficiencia y menor complejidad. Es así que el polinomio de Taylor de una función analítica, representa un procedimiento adecuado cuando éste se utiliza dentro de regiones de abundante analiticidad. La afinidad teórica entre funciones holomorfas y polinomios, o entre funciones meromorfas y funciones racionales, es notoria. Asimismo, hay una estrecha relación entre funciones analíticas a trozos y esquemas de aproximación a trozos como los splines con nodos libres.[23] En el capítulo 3 hemos tratado de explotar la similitud estructural que presunta-

[22] Ver el capítulo 10 de [159]. Si subyace la norma de L^2 es usual poner $H^p = W^p_2$.

[23] La linealidad del esquema polinomial a trozos se consigue cuando consideramos nodos preasignados. El esquema de aproximación con nodos libres nos permite obtener mejores ajustes a pesar de la relevante no linealidad.

mente existe entre las funciones que son analíticas en un intervalo, excepto en un número finito de puntos, y las funciones racionales a tramos.

1.1.5. Orden asintótico de convergencia

A los efectos prácticos es muy importante que el estimado (1.27) funcione para valores pequeños del parámetro n. En cambio, en la teoría es frecuente tomar como referencia básica a la eficiencia del método de aproximación óptimo, relativo a un esquema de aproximación preseleccionado, de modo que (1.27) vale para todo n suficientemente grande y adopta la forma

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{E}_n) = \mathcal{O}(\rho_n), \tag{1.29}$$

donde $(\mathbf{E}_n)$ proviene de la definición 1.1.3.

Al miembro de la izquierda en (1.29) le hemos llamado en los anteriores epígrafes (página 5), la mejor aproximación de $\mathbf{x}$ mediante elementos de $\mathbf{E}_n$.

El nivel de exactitud de los estimados (1.27) y (1.29) se corresponde con las sucesivas etapas de su estudio. La historia de la mejor aproximación racional de la función $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, nos puede servir de referencia (ver la sección 1.2).

El problema de medir la exactitud del estimado (1.29) puede establecerse para una función particular o para una subclase Y del dominio de convergencia del método óptimo de aproximación. Para una subclase tenemos el siguiente planteamiento.

$$\sup_{\mathbf{x}\in Y} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{E}_n) = \mathcal{O}(\rho_n). \tag{1.30}$$

Decimos que (1.30) es exacto para la subclase Y si

$$\liminf_n \frac{\sup_{\mathbf{x}\in Y} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{E}_n)}{\rho_n} > 0. \tag{1.31}$$

Para obtener estimados exactos se recomienda estudiar el problema de la eficiencia respecto a ciertas subclases del dominio de convergencia, convenientemente elegidas.

Los conceptos de límite superior e inferior, ya utilizado el primero en los teoremas 1.1.8 y 1.1.9, los seguiremos viendo a lo largo del libro. Aunque su definición es simple la recordaremos a continuación. Sea (x_n) una sucesión numérica. Los límites superior e inferior de (x_n) se definen respectivamente por

$$\limsup_n \alpha_n = \inf_n \sup_{m\geq n} \alpha_m, \quad \liminf_n \alpha_n = \sup_n \inf_{m\geq n} \alpha_m.$$

La característica más importante del límite superior (límite inferior) es que basta que (x_n) sea acotada superiormente (resp. inferiormente) para que éste exista. En caso contrario, el límite es $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Volvamos a los estimados puntuales del orden de convergencia. Es decir, el estudio de la velocidad del infinitesimal $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$, para una función $\mathbf{x}$ específica.

El objetivo que se persigue es revelar lo más exactamente posible cuáles son las componentes de la sucesión $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. Consideremos los siguientes casos.

$$\limsup_n \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)^{1/n} \leq e^{-2}, . \tag{1.32}$$

$$\frac{K_1 e^{-3n}}{n} \leq \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq K_2 e^{-2n}, \tag{1.33}$$

$$\frac{K_1 e^{-2n}}{n^2} \leq \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq K_2 e^{-2n}, \tag{1.34}$$

$$K_1 e^{-2n} \leq \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq K_2 e^{-2n}, \tag{1.35}$$

donde $0 < K_1 < K_2$.

El estimado (1.32) nos dice que $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$ converge igual o más rápido a cero que la sucesión geométrica e^{-2n}, mientras que (1.33) expresa adicionalmente que el orden de convergencia no es más rápido que el geométrico, concretamente e^{-3n}. Obviamente (1.33) representa un resultado más exacto que (1.32) porque ofrece más información acerca del error $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. El lector puede comprobar fácilmente que (1.35) es el estimado más exacto de todos los anteriores y que (1.34) y (1.35) permiten deducir directamente que

$$\lim_n \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)^{1/n} = e^{-2},$$

mientras que (1.33) sólo nos ofrece la posibilidad de afirmar que

$$e^{-3} \leq \liminf_n \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)^{1/n} \leq \limsup_n \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)^{1/n} \leq e^{-2}.$$

El estudio de la sucesión $\kappa_n = \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)^{\alpha_n}$, con $\alpha_n = 1/n$, sólo permite detectar componentes del tipo e^{-c}, $c > 0$. El lector puede construir ejemplos que muestren qué información puede perderse al estudiar el comportamiento de κ_n. También podría plantearse este problema, relativo al comportamiento asintótico del error, para otros tipos de sucesiones α_n, como es el caso de $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$, bastante frecuente en la teoría.

En el caso de que estemos estudiando la velocidad de convergencia de un método aproximado de integración, lo anteriormente apuntado para la sucesión de errores en una pseudométrica tiene plena vigencia. El error que se comete al sustituir una combinación lineal y finita de valores de la función, por el valor exacto de una integral, depende también de la estructura intrínseca de la función integrando. Cualquier libro de análisis numérico elemental muestra cómo se obtienen estimados del error utilizando el polinomio de Taylor, siempre que la función tenga derivadas hasta cierto orden n. Hay casos de funciones no necesariamente derivables para las cuales la velocidad $\mathcal{O}(1/n)$ es característica del error de cuadraturas. Un ejemplo bien conocido es el del método de los trapecios aplicado a las funciones monótonas, propiedad ésta que a su vez determina un tipo estructural muy importante.[24]

1.1.6. Los espacios H^p

Los espacios de Hardy en el disco unidad son funciones con una característica acotada. Son también conocidos por el breve nombre de espacios H^p y ocupan un lugar intermedio entre las funciones analíticas y las series de Fourier. Su importancia en las teorías de la aproximación real y compleja es considerable. Comunicamos al lector que los libros [72, 116] tratan a los H^p desde puntos de vista diferentes y contienen las demostraciones de los resultados que hemos decidido incluir en esta sección.

Para una función f, analítica en el disco $|z| < 1$, consideremos las siguientes magnitudes asociadas a la misma.

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p},\ 0 < p < \infty; \tag{1.36}$$

$$M_\infty(r,f) = \max_{0\leq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})|. \tag{1.37}$$

Definición 1.1.8 *Sea $0 < p \leq \infty$. Una función analítica f en el disco unidad $|z| < 1$, pertenece a H^p si*

$$\sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty. \tag{1.38}$$

Teniendo en cuenta las respectivas expresiones (1.36) y (1.37), es simple comprobar desde ahora que $H^\infty \subset H^p$, para cualquier $0 < p < \infty$. Más general, si $q > p > 0$, y $r > 0$ es tal que $1/q + 1/r = 1/p$, entonces de la desigualdad de Hölder se deduce que

$$\left(\int |f\,g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^q\right)^{1/q} \left(\int |g|^r\right)^{1/r},$$

para cualquier par de funciones medibles f y g, y por tanto $H^q \subset H^p$.

La condición (1.38) es una simple restricción del crecimiento de la función

[24] En [131] aparecen estimados para funciones de L^p definidas donde quiera, en términos de módulos de suavidad.

f cerca de la frontera que, sin embargo, ha producido desde los años veinte una vasta teoría con aplicaciones en muy diversos campos dentro de la propia matemática. En las siguientes líneas haremos un rápido recorrido por algunos de los conceptos y resultados que, además de ser básicos para esta teoría, son utilizados o mencionados en los restantes capítulos de esta monografía.

Ejemplo 1.1.5 *Los siguientes son algunos ejemplos de funciones de la clase* H^p.

1. $(1-z)^{-1} \in H^p$ *para* $p < 1$ *y no pertenece a* H^1.
2. $\dfrac{1}{1-z}\left(\dfrac{1}{z}\log\dfrac{1}{1-z}\right)^{-c}$ *pertenece a* H^1 *si* $c > 1$.
3. *Toda función analítica en el disco* $|z| < 1$, *e inyectiva*[25] *es de clase* H^p *para* $0 < p < 1/2$.
4. *Dado que* $H^p \subset H^{p'}$, *si* $p > p' \geq 1$, *entonces toda* f *analítica y acotada en* $|z| < 1$ *pertenece a todo* H^p, $p \geq 1$.
5. *Cada función analítica* $f(z)$ *con parte real positiva en* $|z| < 1$ *es de la clase* H^p *para todo* $p < 1$.

Convergencia a los valores frontera

Una de las primeras consecuencias de la definición 1.1.8, es que las funciones de H^p tienen un representante natural definido en la frontera del disco unidad.

Teorema 1.1.10 *Toda* $f \in H^p$, $p > 0$, *tiene límite radial* $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ *casi donde quiera.*

Teorema 1.1.11 *Si* $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$, *entonces*

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta, \tag{1.39}$$

y

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0. \tag{1.40}$$

La clase H^p, $0 < p \leq \infty$, tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial respecto a la suma usual de funciones y al producto por un escalar.

Para $f \in H^p$, definamos

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} M_p(r, f).$$

[25] Es decir, una correspondencia uno a uno.

Entonces $\|f\|_p$ es una norma para $1 \leq p \leq \infty$, y $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p$ es una distancia para $0 < p < 1$. Se prueba que $(H^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach; y (H^p, d_p), $0 < p < 1$, es un espacio de Frechet.(26

Otros dos resultados básicos de esta teoría están dados por la siguiente

Proposición 1.1.2 *Las siguientes proposiciones tienen lugar.*

1. *Los polinomios son densos en H^p si $0 < p < \infty$.*
2. *Si $1 \leq p \leq \infty$ la clase de las funciones frontera, límite radial c.d., de H^p es el subespacio de $L^p = L^p(|z| = 1)$ para el cual*

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Es decir, H^p puede ser considerado como un subespacio (cerrado) $\mathcal{H}^p$ de L^p cuyos coeficientes de Fourier negativos se anulan.(27

El dual de H^p

Utilizando el teorema de Hahn-Banach y el apartado 2 de la proposición 1.1.2, podemos inferir que si Λ es un funcional lineal y continuo de H^p, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, tal que

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) g(z)\, dz, \;\; f \in H^p.$$

El próximo resultado permite precisar la naturaleza de los elementos que componen al dual de H^p, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.1.12 *Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $(H^p)^*$ (dual topológico de H^p) es isométricamente isomorfo a L^q/H^q, donde $1/p + 1/q = 1$.*

Además, si $1 < p < \infty$, cada $\phi \in (H^p)^*$ es representable en la forma

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta, \tag{1.41}$$

por una única función $g \in H^q$, mientras cada $\phi \in (H^1)^*$ puede ser representada en la forma (1.41) por algún $g \in L^\infty$.

---

[26]Es decir, un espacio vectorial topológico metrizable y completo.
[27]En el lenguaje de los isomorfismos.

El desarrollo de Taylor de $f \in H^p$

Tal como afirmamos al comienzo de esta sección, los espacios H^p pueden ser considerados uno de los principales enlaces que existen entre las funciones analíticas y las series de Fourier. El siguiente teorema establece esta conexión en términos de las respectivas representaciones de $f(re^{i\theta}) \in H^p$ y de su límite radial c.d.

Teorema 1.1.13 *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función de H^1, y sea $\{c_n\}$ la sucesión de coeficientes de Fourier de su límite radial c.d. $f(e^{it})$. Entonces $c_n = a_n$ para $n \geq 0$, y $c_n = 0$ para $n < 0$. Además, $\mathcal{H}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ es exactamente la clase de funciones de L^p cuyos coeficientes de Fourier se anulan para todo $n < 0$.*

Medidas de Carleson

Definición 1.1.9 *Una medida finita μ sobre los conjuntos de Borel de $|z| < 1$ se llama medida de Carleson si existe una constante A tal que $\mu(S) \leq Ah$, para cada conjunto S de la forma*

$$S = \{z = re^{i\theta} : 1 - h \leq r < 1;\, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h\}.$$

Ejemplo 1.1.6 *Ejemplos de medidas de Carleson.*

1. *La medida discreta $\mu(z_n) = 1 - |z_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, donde (z_k) es una sucesión uniformemente separada. Es decir, existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$\prod_{j=1,\, j\neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| \geq \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

2. *La medida plana de Lebesgue en $|z| < 1$.*
3. *La medida lineal $d\nu$ de Lebesgue en el abierto $(-1, 1)$.*
4. *$d\mu(z) = w(z) d\nu(z)$, con $w \in L^\infty$.*

El teorema de Carleson

Teorema 1.1.14 *Sean μ una medida finita sobre $|z| < 1$, y $0 < p < \infty$. Entonces, para que exista una constante C tal que*

$$\left(\int_{|z|<1} |f(z)|^p d\mu(z) \right)^{1/p} \leq C \|f\|_p, \tag{1.42}$$

para toda $f \in H^p$, es necesario y suficiente que μ sea una medida de Carleson.

La condición (1.42) expresa que $H^p \subset L^p(\mu)$ cuando μ es de Carleson. Más aún, (1.42) también dice que la inyección canónica de H^p en el espacio $L^p(\mu)$ es continua.

El teorema de Carleson 1.1.14 generaliza un resultado particular utilizado en la demostración del teorema principal de interpolación que aparece más adelante. De momento explicaremos en qué consiste el problema de interpolación en los espacios de Hardy.

Problema general de interpolación *Sean $z_1, z_2, \ldots$ puntos diferentes dos a dos del disco unidad, y $w_1, w_2, \ldots$ números complejos arbitrarios. El problema general de interpolación es caracterizar los pares de sucesiones (z_n) y (w_n) para los cuales existe una función $f \in H^p$, llamada de interpolación o interpolante, tal que $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Interesa además hallar todas las funciones f de interpolación.*

El anterior problema general es muy difícil de resolver completamente por lo que en [72] se trata exclusivamente el problema más restringido de hallar las llamadas sucesiones de interpolación universales.

Aunque no es el propósito de esta sección el estudio exhaustivo del problema de interpolación en los espacios H^p, trataremos de presentar al lector las ideas básicas de la teoría que tienen una notable vinculación con los resultados del capítulo 2.

Si $f \in H^p$ es una función de interpolación para las sucesiones (z_n) y (w_n) ésta es única si y sólo si $\sum(1 - |z_k|) = \infty$, ya que la diferencia de dos funciones interpolantes f_1 y f_2 se anula en los puntos z_k y por tanto $f_1 = f_2 + B\,g$, donde $g \in H^p$ no se anula en ningún punto del disco y B es un producto de Blaschke de la forma

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}. \tag{1.43}$$

Si asumimos que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots < 1$ y $\sum(1 - |a_k|) < \infty$, entonces el producto infinito (1.43) converge uniformemente en cada disco $|z| \leq R < 1$. Cada número a_n es un cero de $B(z)$ cuya multiplicidad es igual al número de veces que aparece en la sucesión. Además, $B(z)$ no tiene otros ceros en el disco unidad, cumple $|B(z)| < 1$ en el disco unidad y $|B(e^{i\theta})| = 1$ casi donde quiera (ver la página 19 de 2.34).

A continuación presentamos la definición de sucesión de interpolación universal.

Definición 1.1.10 *Sean $0 < p \leq \infty$ y (z_k) una sucesión prefijada en el disco unidad. Sea T el operador lineal definido por $T(f) := (f(z_k))$, $f \in H^p$. Decimos* *que (z_k) es una sucesión universal de interpolación si $T(H^\infty) = l^\infty$.*

La extensión natural de T a los espacios H^p es la siguiente. Sea T_p el operador lineal que actúa sobre H^p de la siguiente forma:

$$T_p(f) := \{(1 - |z_k|^2)^{1/p} f(z_k)\}.$$

Es conocido que si p es finito y la sucesión (z_k) no tiene puntos de acumulación en el disco abierto, entonces T_p tiene su rango en el espacio de las sucesiones infinitesimales. Por otra parte el rango no se sumerge en l^p aún incluso cuando $\sum(1 - |z_k|) < \infty$.

Observemos que en particular $T_\infty = T$.

El siguiente resultado aparece demostrado en [72].

Teorema 1.1.15 *Para $0 < p \leq \infty$, $T_p(H^p) = l^p$ si y solo si (z_k) está uniformemente separada, es decir, si existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| \geq \delta.$$

Una condición suficiente para que (z_k) sea uniformemente separada es que exista una constante $c < 1$ tal que $1 - |z_{n+1}| \leq c(1 - |z_n|)$, $n = 1, 2, ...$ Esta condición es también necesaria si $0 \leq z_1 < z_2 < ....$

La relación existente entre el teorema de Carleson 1.1.14 y las sucesiones interpolantes puede verse en las páginas 156-157 de [72].

1.2. Resultados y líneas de investigación

En esta sección el lector encontrará una muestra de las principales contribuciones del siglo XX a la teoría de la aproximación de funciones y del cálculo numérico de integrales. Exceptuando el estilo de los apuntes que aparecen en la subsección 1.2.1, el verdadero objetivo de este espacio no es escribir de nuevo la historia reciente, sino simplemente ofrecer alguna información acerca de los diferentes tipos de resultados y problemas que se relacionan teórica o técnicamente con los restantes capítulos de la obra.

La sección 1.2.2 está dedicada fundamentalmente a la aproximación racional de funciones en topologías de convergencia uniforme y, entre otros temas, considera con especial énfasis el problema de la contaminación por singularidades y la aproximación en el sentido de Padé. A continuación, la sección 1.2.3 menciona algunos resultados y conceptos propios de la integración numérica de funciones, y sus vínculos con la aproximación racional.

Las demostraciones de los resultados teóricos que aquí se mencionan el lector puede encontrarlas en las correspondientes referencias bibliográficas.

1.2.1. Introducción

Los trabajos de Chebyshev en el siglo XIX han servido para marcar el nacimiento de la teoría de la aproximación racional.[(28] En sus memorias, publicadas en el año 1859, aparece un teorema de la forma: *el error de la mejor aproximación racional debe alcanzar su valor máximo en al menos k puntos.* Cheney [63] sugiere en sus notas históricas que, en lo que respecta a los métodos racionales de aproximación, hubo un período improductivo entre las publicaciones de Chebyshev a mediados del siglo XIX, y los trabajos de J. L. Walsh a principios de la década de los años 30 en el siglo XX. Hoy ambos, Chebyshev y Walsh, continúan siendo una referencia básica en la mayoría de los trabajos publicados sobre el tema.

Fue Walsh [241] quien primero demostró la existencia de la mejor aproximación racional de funciones continuas sobre un intervalo. También estudió problemas relativos a la sobre-convergencia, la interpolación racional y la localización de los ceros de la mejor aproximación polinomial. Su libro [242] es actualmente un clásico de la literatura científica.

Independientemente de la importancia de los trabajos de Chebyshev y Walsh, muchos otros investigadores de la época aplicaron la aproximación racional en la solución de diferentes problemas de la física y la matemática, e hicieron considerables aportes teóricos. En 1812 Gauss [86] aplica el desarrollo en fracciones continuas de transformadas de Cauchy para deducir su conocida fórmula de cuadratura de grado máximo de exactitud. Matemáticos muy conocidos como Fourier, Hermite, Runge, Markov, Weierstrass, Féjer, Picard, Lebesgue y Bernstein, contribuyeron significativamente con el desarrollo de la aproximación de funciones en los siglos XVIII, XIX y XX. Las ideas y resultados de entonces dieron un gran impulso y guiaron el desarrollo de esta rama de las matemáticas de una forma casi unificada hasta los años 60; época en la cual se hicieron visibles las primeras diferencias entre los métodos polinomiales y racionales. Quizás el principal resultado que marcó este nuevo rumbo en la investigación, fue debido a D. J. Newman en 1964, quien demostró que la función $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$, puede ser más rápidamente aproximada mediante funciones racionales que por

[28] Chebyshev Pafnuti Lvovich (1821-1894). En algunos libros se transcribe como Tchebycheff.

polinomios. La clase de las funciones que cumplen una propiedad constructiva como la anterior ha sido ampliada por las investigaciones de algunos especialistas entre los cuales se destacan N. S. Viacheslavov, A. P. Bulanov, A. Gonchar, V. A. Popov, P. Turán, T. Ganelius y el propio Newman. Este desarrollo teórico ha provocado que las funciones racionales, a pesar de la disposición no lineal de algunos de sus parámetros, hayan sido llamadas a sustituir a los polinomios en la tarea de aproximar ciertos tipos de funciones, especialmente aquellas que son analíticas excepto en algunos puntos.

Comprendemos mejor la importancia adquirida por los métodos racionales si aceptamos que la mayoría de los fenómenos naturales y sociales están modelizados en términos de funciones con estas características.[29] Otros argumentos como los siguientes pueden ser dados a favor del esquema de aproximación racional .

- Los problemas cuya naturaleza es no lineal, no siempre son resueltos mediante los métodos del cálculo diferencial.[30]

- Diversos problemas lineales han sido tratados con éxito mediante métodos no lineales. Por ejemplo, las fórmulas óptimas de cuadratura han sido estudiadas mediante splines polinomiales con nodos libres.[31]

- Cualquier función racional del tipo (n, m) puede ser evaluada mediante no más de $\text{máx}\{n, m\}$ operaciones aritméticas largas.

El siguiente epígrafe muestra algunas de las principales líneas de trabajo científico que en el siglo XX, a partir de los años sesenta, fueron desarrolladas en torno a la aproximación racional de funciones.

1.2.2. La aproximación racional

La distancia uniforme de la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $F_{n,m}$ es llamada la mejor aproximación racional a la función f, de orden (n, m), y se representa por[32]

$$\mathcal{R}_{n,m}(f)_\infty = \mathcal{R}_{n,m}(f, [a, b])_\infty = \inf\{\|f - r_n\|_\infty;\ r_n \in F_{n,m}\}.$$

A la sucesión doble $(\mathcal{R}_{n,m}(f)_\infty)_{m,n=0}^\infty$ se le llama *tabla de Walsh* asociada a f. En lo que sigue adoptaremos el convenio de escribir $\mathcal{R}_n(f)_\infty$ cuando $n = m$.

[29] Esta es una opinión compartida con A. Markushevich [163] y F. Stenger [220].
[30] Es decir, por aproximación local mediante polinomios.
[31] El capítulo 4 trata acerca de la conexión entre dos problemas, uno no lineal de aproximación racional, y el otro relativo a la convergencia débil de funcionales lineales.
[32] La definición de $F_{n,m}$ aparece en la página 8.

Para el caso polinomial algebraico tenemos que la mejor aproximación de orden n, de la función f, está dada por

$$\mathcal{E}_n(f)_\infty = \mathcal{E}_n(f, [a,b])_\infty = \inf\{\|f - p_n\|_\infty;\ p_n \in \Pi_n\}.$$

La función $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$; ha sido el primer ejemplo de función con singularidades para la cual se demostró que

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty = o\left(\mathcal{E}_n(f)_\infty\right). \tag{1.44}$$

La condición (1.44) se deduce directamente de uno de los más mencionados resultados de la teoría de aproximación: el teorema de D.J.Newman [172] en el cual se establece el siguiente estimado

$$\exp\left(-\pi\sqrt{n+1}\right) \leq \mathcal{R}_n(|x|)_\infty \leq 3\exp\left(-\sqrt{n}\right), \quad n \geq 5, \tag{1.45}$$

mientras que, en la anterior década, Bernstein [19] había demostrado que

$$\mathcal{E}_n(|x|)_\infty \asymp \frac{1}{n}.$$

Una función que cumpla la condición (1.44) se dice que tiene la propiedad de Newman.

Newman ha sido el inventor de sencillos y a la vez importantes artificios técnicos que han sentado pautas en el tema de la aproximación racional. El lector puede apreciar el sentido de la anterior afirmación, consultando algunos artículos publicados en fechas posteriores a 1964. Citemos como ejemplos a: Gonchar [97], Andersson [7], Ganelius [85] y Levin et al [148]. En lo que sigue dedicaremos un espacio adicional al resultado principal del artículo [172], con el objetivo de señalar algunos aspectos de interés técnico. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ a las siguientes expresiones algebraicas en la variable x.

$$N_n(x) := \prod_{k=1}^{n-1}(x + e^{-k/\sqrt{n}}). \tag{1.46}$$

Los polinomios del tipo (1.46) han jugado diversos papeles en la teoría de la aproximación racional de funciones, y fueron diseñados por Newman para obtener el estimado superior de (1.45).(33 El siguiente estimado es quizás una de las más notables propiedades de (1.46).

Lema de Newman *Los polinomios (1.46) para $n \geq 5$ y $x \in [e^{-\sqrt{n}}, 1]$ satisfacen*

$$\left|\frac{N_n(-x)}{N_n(x)}\right| \leq e^{-\sqrt{n}}. \tag{1.47}$$

33En el capítulo 2 puede verse en la demostración del teorema 2.2.1 (pag. 89) una variante técnica de (1.46) debida a Gonchar. Otros comentarios al respecto pueden verse en la página 67.

Una función racional r_n, suficientemente cercana a $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, y que permita obtener la acotación superior de $\mathcal{R}_n(|x|)_\infty$ en (1.45) podría estar dada por

$$r_n(x) := x\frac{N_n(x) - N_n(-x)}{N_n(x) + N_n(-x)}. \tag{1.48}$$

Una característica de la sucesión (r_n) definida por (1.48), es que no converge exponencialmente a $|x|$ en subdominios de $[-1, 1]$ con abundante analiticidad. En [148] puede verse la demostración de que

$$\lim_n \| |x| - r_n(x) \|_{[\epsilon,\eta]}^{1/n} = 1,$$

cualquiera sea el intervalo $[\epsilon, \eta] \subset [-1, 1] \backslash \{0\}$.

El déficit de convergencia geométrica de la sucesión de aproximantes de Newman (1.48) es producida por la fuerte agrupación de los ceros de los polinomios (1.46) cerca del origen.

El estudio de sucesiones de funciones racionales de la forma

$$r_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(-x)}, \quad P_n \in \Pi_n, \tag{1.49}$$

con la propiedad de converger rápidamente a cero en los intervalos de la forma $[\epsilon, 1]$, $0 < \epsilon < 1$, tal como ocurre en (1.47) sobre $[e^{-\sqrt{n}}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$; ha sido decisivo en la obtención de buenos aproximantes de las funciones $|x|$, $sgn\, x$, y otras similares. En esta dirección el lector puede consultar los artículos [85, 97, 122, 124, 148, 172, 239].

El lema de Newman [172] fue ligeramente modificado por A. Gonchar [97] para obtener el estimado general (1.67) cuando f es una función con singularidades características en los puntos extremos del intervalo.[34] La técnica de Gonchar permitió probar por primera vez que $\mathcal{O}(\exp(-c\sqrt{n\alpha}))$, $c > 0$, es el peor orden de convergencia de $\mathcal{R}_n(f)_\infty$ para funciones $f \in$Lip α, $0 < \alpha < 1$.

La función $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $0 \leq x \leq 1$, es un caso particular muy importante de función de la clase Lip α y ha recibido una atención especial junto a la función valor absoluto $|x|$. A principios de la década de los años 60 ya era conocido que el orden exacto de aproximación polinomial a f_α es $\mathcal{O}(n^{-\alpha})$, y por tanto se deducía que el orden de aproximación racional no podía ser peor que éste. El orden de convergencia a cero de $\mathcal{R}_n(f_\alpha)_\infty$ fue paulatinamente descrito por Gonchar ([100], 1974), Viacheslavov ([239], 1975), y finalmente por Ganelius ([85], 1979), quien demostró que el orden exacto es

$$\mathcal{R}_n(f_\alpha)_\infty \asymp \mathcal{O}(\exp(-\pi\sqrt{n\alpha})). \tag{1.50}$$

[34] Gonchar considera en [97] un tipo especial de singularidad interior. Una definición más simétrica está dada en el capítulo 3.

Las investigaciones sobre la mejor aproximación racional de $|x|$, no se detuvieron en el año 1964. El matemático ruso Vyacheslavov [239] demostró en 1975 la veracidad de la siguiente conjetura de Gonchar

$$\mathcal{R}_n(|x|)_\infty \asymp e^{-\pi\sqrt{n}}. \tag{1.51}$$

Antes de continuar con esta narración introduzcamos una notación muy utilizada en la teoría de la aproximación y en el análisis numérico. Decimos que la sucesión (a_n) es "o pequeña"de (b_n), y lo expresamos simbólicamente como $a_n = o(b_n)$, si existe una sucesión infinitesimal de números positivos (ϵ_n), tal que $|a_n| \leq \epsilon_n |b_n|$, a partir de un cierto n_0.

La equivalencia asintótica de las sucesiones (a_n) y (b_n) se expresa ahora como $a_n = b_n(1 + o(1))$.

Los resultados numéricos obtenidos por Varga, Ruttan y Carpenter, 16 años después que apareció publicado el estimado (1.51), permitieron predecir que

$$\mathcal{R}_n(|x|)_\infty = 8e^{-\pi\sqrt{n}}(1 + o(1)). \tag{1.52}$$

Apenas un año después, H. Stahl [219] demostró teóricamente (1.52) utilizando para ello métodos de la teoría del potencial y estimados de integrales elípticas.(35

Tal como indicamos anteriormente, la historia de la función f_α se ha desarrollado de una forma parecida a la de $|x|$. Varga y Carpenter hicieron precisos cálculos del error $\mathcal{R}_n(f_\alpha)_\infty$, para muchos valores de n, y los publicaron en 1992. Fue así que se conoció la conjetura cuya validez Stahl también logró confirmar con el siguiente teorema: Para $0 < \alpha < 1$ se tiene que(36

$$\mathcal{R}_n(f_\alpha)_\infty = 4^{1+\alpha}|\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}(1 + o(1)). \tag{1.53}$$

Teniendo en cuenta que $|x| = \sqrt{x^2}$ y que el mejor aproximante racional de $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, es una función par se obtiene la notable igualdad

$$\mathcal{R}_{2n}(|x|, [-1, 1])_\infty = \mathcal{R}_n(f_{1/2}, [0, 1])_\infty,$$

que en parte explica el desarrollo paralelo que han tenido las respectivas historias de las funciones f_α y $|x|$.(37

Sea f una función definida en una región D del plano complejo. Si existen puntos de $\overline{D}$ en los cuales f no admite extensión analítica, entonces el proceso de aproximación racional a esta función tiene en general unas características

[35] El capítulo 8 de [159] está íntegramente dedicado a la demostración de este resultado.

[36] Notar que (1.52) y (1.53) son estimados más exactos que (1.51) y (1.50) respectivamente.

[37] Debe incluirse a la función signo $sgn\, x$, la cual constituye técnicamente un primer peldaño en el estudio de la aproximación de funciones continuas cualesquiera. Ver [96, 148].

diferentes al polinomial. Los polos de las funciones racionales son presuntamente los encargados de atenuar los efectos negativos que las singularidades de f pueden producir. Los polinomios en cambio, sólo disponen de un punto singular en el infinito.

Los dos ejemplos anteriormente considerados: $f(x) = |x|$ y $f_\alpha(x) = x^\alpha$, no son los únicos que satisfacen la propiedad de Newman (1.44). Una función suave como e^x, $x \in [-1, 1]$, verifica

$$\mathcal{R}_n(e^x)_\infty \asymp \sqrt{\pi n}\, 4^{-n} \mathcal{E}_{2n}(e^x)_\infty.$$

Resultados generales han sido obtenidos en la clase $Lip\,\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, formada por las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, para $x, y \in [-1, 1]$, y cierta constante $M > 0$.

Popov [186] comprobó la validez de la llamada conjetura $Lip\,1$ de Newman, la cual afirmaba que toda $f \in Lip\,1$ definida en $[-1, 1]$ cumple que

$$\lim_n n\mathcal{R}_n(f)_\infty = 0. \tag{1.54}$$

En esta dirección Newman [175] también demostró que si f es de la clase $Lip\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$, y para casi todo $x \in [-1, 1]$, se cumple que[(38]

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h^\alpha} = 0,$$

entonces

$$\lim_n n^\alpha \mathcal{R}_n(f)_\infty = 0.$$

De (1.54) y el teorema de Jackson podríamos inferir que la propiedad de Newman (1.44) debe cumplirse para muchas funciones de la clase $Lip\,1$. Verdaderamente, en el sentido de las *categorías* de Baire, lo que podemos esperar es que subsucesiones de funciones racionales y polinomios aproximantes converjan con la misma velocidad. Para precisar el sentido del anterior párrafo comencemos recordando que en un espacio métrico un conjunto se dice *nunca denso* si el interior de su clausura es vacío. Asimismo decimos que un conjunto es de categoría 1 si es la unión numerable de conjuntos nunca densos. Uno de los resultados obtenidos por Borwein y Zhou en [39] es el siguiente.

Teorema de Borwein-Zhou [39]
Sea el conjunto C_1 definido por

$$C_1 = \left\{ f \in C[-1, 1];\ \limsup_n \frac{\mathcal{R}_n(f)_\infty}{\mathcal{E}_n(f)_\infty} = 1 \right\}. \tag{1.55}$$

Entonces C_1 es el complemento de un conjunto de categoría 1.

[38]Consultar el artículo de Borwein y Zhou [38], y la bibliografía que éste contiene.

Una generalización del teorema anterior fue obtenida por Shekhtman [212] al considerar, en lugar de los polinomios, a un subespacio cualquiera E de $C(X)$ y a la clase asociada de fracciones $R(E) = \{g/h;\ g,\ h \in E;\ h > 0\}$.

Aunque tengamos resultados como el anterior, en la práctica suelen aparecer funciones que no son de la clase C_1 dada en (1.55). El lector puede comprobar que las funciones $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, y x^α, $0 \leq x \leq 1$, no pertenecen a C_1, y extender este resultado a toda función que satisfaga la propiedad de Newman (1.44) (página 37). Por otra parte, no debe ser una tarea fácil determinar para cada $f \in C_1$, una subsucesión n_k que permita igualar los órdenes de convergencia racional y polinomial. En los siguientes párrafos veremos otros ejemplos de funciones no pertenecientes a C_1, y trataremos de apreciar el papel que juegan las singularidades en el proceso aproximativo.

La teoría conocida hasta el año 1986, permitió a Saff [208] establecer un principio relativo a la influencia de los puntos singulares en el proceso aproximativo mediante polinomios óptimos.

Principio de contaminación *Sea f continua sobre E y analítica en el interior de E, siendo E un conjunto compacto, cuyo complemento respecto al plano ampliado es conexo y regular para el problema de Dirichlet. Si f tiene una o más singularidades sobre la frontera de E, entonces estas singularidades afectan de manera adversa el comportamiento, sobre toda la frontera de E, de una subsucesión de los mejores aproximantes polinomiales a f sobre E.*

Saff ha señalado varias limitaciones del anterior principio. Una de estas es que el mismo se establece únicamente para la mejor aproximación polinomial, y no es extensible al caso racional. Sin embargo, este último esquema de aproximación es también afectado por la presencia de puntos singulares. El siguiente principio expresa expectativas y una comparación entre ambos casos.

Principio de contaminación relativa *La velocidad de convergencia de la mejor aproximación polinomial está más afectada por la presencia de singularidades, que la velocidad de convergencia de la mejor aproximación mediante funciones racionales.*

Un ejemplo que se corresponde con el último principio es el de la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2x^2+1)},$$

analítica en todo $x \in \mathbb{R}$, excepto en $x = 0$. Esta función admite prolongación analítica al plano menos los puntos $\pm i/n$, y el origen. Además, es continua en todo $x \in \mathbb{R}$, y en particular en el intervalo $[-1,1]$, sobre el cual es uniformemente aproximada mediante funciones racionales con velocidad de convergencia exponencial. Ahora podemos comparar este resultado con el comportamiento de la mejor aproximación polinomial en en mismo intervalo, según indica la equivalencia (1.57) (página 44).

Actualmente es conocido que la vía de las singularidades no es la única que conduce a nuevas clases de funciones cuya afinidad constructiva es mayor con respecto a las funciones racionales que con respecto a los polinomios. Aquí diremos que una función f, definida en un intervalo I, cumple una propiedad de tipo ST, (Szüsz- Turán) si ésta se cumple para las restricciones de f a los subintervalos I_k, de cierta subdivisión $\{x_k\}_{k=1}^{k=\nu}$ de I, y no se cumple para f sobre I. Esta característica también se expresa diciendo que f tiene mejores propiedades en el interior de los subintervalos I_k, que en todo el intervalo I. Las funciones continuas en un intervalo, y diferenciables salvo en un número finito de puntos, son ejemplos de la clase ST.

Los primeros resultados que se han obtenido especialmente para funciones con propiedades de tipo ST, están dados para los esquemas simples polinómico y racional.(39 Szüsz y Turán [229] estudiaron la aproximación racional de funciones que cumplen una condición de Lipschitz más favorable dentro de los I_k que en todo I. Para precisar definamos

$$I_k(\epsilon-) = [x_k + \epsilon, x_{k+1} - \epsilon], \;\; 0 < \epsilon < \min_{0 \leq k \leq \nu} (x_{k+1} - x_k)/2,$$

$k = 1, ..., \nu + 1$. La clase $\mathcal{C}(c(\epsilon), \alpha, \beta, \nu)$ es aquella formada por las funciones f tales que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \begin{cases} c(\epsilon)|x_1 - x_2|^\beta & \text{if} \;\; x_1, x_2 \in I_k(\epsilon-), \; k = 0, ..., \nu, \\ \\ K|x_1 - x_2|^\alpha & \text{if} \;\; x_1, x_2 \in [-1, 1], \end{cases}$$

donde $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $K > 0$ es una constante que depende de f, y $c(\epsilon)$ es una función positiva y monótona decreciente de ϵ, que cumple

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} c(\epsilon) = +\infty.$$

Es sabido que el orden de aproximación polinomial a una función de la clase $\mathcal{C}(c(\epsilon), \alpha, \beta, \nu)$ es generalmente $\mathcal{O}(n^{-\alpha})$. Szüsz y Turán establecieron sin una prueba rigurosa que la aproximación racional a este tipo de función es del orden $\mathcal{O}(n^{-\beta})$. Posteriormente Freud [78] demostró que Szüsz y Turán tenían razón, al menos en el caso en que $c(\epsilon) = 1/\epsilon^\alpha$. En esta dirección Szabados [223] obtuvo

[39]Es decir, aproximantes de una única pieza.

en el caso general que el orden es ciertamente $o(n^{-\alpha})$, dependiendo del tipo de función $c(\epsilon)$ el papel que ha de jugar el parámetro β en el estimado.

Teorema A de Szabados [223]
Sean $f \in \mathcal{C}(c(\epsilon), \alpha, \beta, \nu)$ y a_m la solución de la ecuación

$$c(a_m) = K a_m^{\alpha} m^{\beta-\alpha},$$

para m suficientemente grande. Entonces existen funciones racionales r_n de orden a lo más n, para las cuales

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - r_n(x)| \leq 96K(2\nu+1)^{\alpha} \left(\frac{a_m}{n}\right)^{\alpha},$$

siendo m el doble de la parte entera de $n/(8(2\nu+1))$.

El orden "o pequeña" de $n^{-\alpha}$ es consecuencia de que $\lim_m a_m = 0$. De este modo el teorema A de Szabados prueba que la clase $\mathcal{C}(c(\epsilon), \alpha, \beta, \nu)$ satisface en general la propiedad de Newman.

Si seguimos la técnica de [223], el orden que se obtenga para el estimado de la mejor aproximación racional dependerá del orden con que $c(\epsilon)$ tienda a infinito cuando $\epsilon \to 0$. Los tres casos siguientes tienen interés propio (ver [223]).

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - r_n(x)| = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\nu^{\beta}\dfrac{\log^{\gamma} n}{n^{\beta}}\right) & \text{si} \quad f \in \mathcal{C}(|\log(\epsilon)|^{\gamma}, \alpha, \beta, \nu) \\[2ex] \mathcal{O}\left(\left(\dfrac{\nu}{n}\right)^{\alpha\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}}\right) & \text{si} \quad f \in \mathcal{C}(\epsilon^{-\gamma}, \alpha, \beta, \nu) \\[2ex] \mathcal{O}\left(\left(\dfrac{\nu\log\nu}{n\log n}\right)^{\alpha}\right) & \text{si} \quad f \in \mathcal{C}\left(\exp\left(\dfrac{\gamma}{\epsilon}\right), \alpha, \beta, \nu\right), \end{cases}$$

siendo $\gamma < \beta - \alpha$.

Las investigaciones relativas a subclases de $C^k[a,b]$, $k = 0, 1, ...$, cuya propiedad común es la de ser más rápidamente aproximadas mediante funciones racionales que mediante polinomios, se han realizado atendiendo a la naturaleza de los puntos singulares. La condición de tener derivada continua hasta el orden k, es en sí misma una propiedad estructural de las funciones que determina con notable precisión la velocidad con que estas pueden ser aproximadas polinomialmente. Es el caso de $f \in C^k[-1,1]$ y $f \notin C^{k+1}[-1,1]$, para la cual se tiene el siguiente estimado (ver [231])

$$\frac{c_1}{n^{k+1}} \leq \mathcal{E}_n(f, [-1,1])_{\infty} \leq \frac{c_2}{n^{k+1}}, \tag{1.56}$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas.

Una función f que cumple (1.56) tiene necesariamente singularidades. Es decir, existen puntos del intervalo $[-1,1]$ donde f no admite prolongación analítica. Esta conclusión está basada en el siguiente resultado. Si E es un compacto del plano complejo, regular para la solución del problema de Dirichlet asociado, entonces

$$f \in A(E) \Leftrightarrow \limsup_n [\mathcal{E}_n(f)_\infty]^{1/n} < 1, \tag{1.57}$$

donde $A(E)$ denota al conjunto de las funciones analíticas sobre algún abierto bidimensional que contiene a E. En términos generales, la presencia de una singularidad de f en el intervalo $[a,b]$, produce una disminución de las velocidades de aproximación polinomial y racional. Es así que los siguientes estimados superiores

$$\mathcal{E}_n(f)_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\beta_1}}\right), \ \beta_1 > 0, \tag{1.58}$$

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty = \mathcal{O}\left(\exp(-\beta_2\sqrt{n})\right), \ \beta_2 > 0, \tag{1.59}$$

establecen órdenes típicos para los casos polinomial y racional respectivamente, en el caso de que f tenga al menos una singularidad en $[a,b]$.[40]

Hay dos cuestiones a considerar cuyo planteamiento se sigue de los párrafos anteriores. Podemos enunciarlas de la siguiente forma.

1. Si $f \in C^k[a,b]$, tiene al menos una singularidad y es analítica en un subintervalo J de $[a,b]$, entonces, sobre J, la velocidad de convergencia de los aproximantes óptimos debería ser mayor (geométrica) que en todo el intervalo.

2. Si f es analítica en un punto $x_0 \in [a,b]$, entonces deberíamos encontrar un disco $D(x_0,\rho)$, sobre el cual los aproximantes óptimos (respecto a $[a,b]$) convergen a la prolongación analítica de f en $D(x_0,\rho)$.

La respuesta a las anteriores conjeturas es en general negativa. Para el caso polinomial Kadec [138] demostró que si $p_n^*(f)$ es el mejor aproximante polinomial de f sobre $[-1,1]$, entonces existe una subsucesión (n_k) para la cual los errores $f - p_{n_k}^*(f)$ tienen puntos extremos que son densos en el intervalo $[-1,1]$. Por otra parte Blatt y Saff [23] han demostrado que si f tiene al menos una singularidad en $[-1,1]$, cada punto de esta intervalo es límite del conjunto de los ceros complejos de la sucesión $(p_n^*(f))_{n=1}^\infty$.

En el caso racional Saff y Stahl [209] probaron que los puntos extremos del

[40] En [97] pueden hallarse ejemplos de aproximación más lenta que (1.59).

error $|x|-r_n^*(x)$, siendo (r_n^*) la sucesión de los mejores aproximantes racionales de $|x|$, son densos en $[-1,1]$, de modo que es imposible obtener convergencia geométrica sobre cualquier subintervalo.

Lo que hemos señalado anteriormente explica por qué los esfuerzos de los investigadores han estado dirigidos hacia la construcción de aproximantes cercanos al óptimo en algún sentido, de modo que éstos sean menos sensibles al efecto adverso de las singularidades.(41 Respecto a las funciones aproximadas, una importante propiedad funcional de tipo ST, vinculada a la propiedad de Newman, es la de ser analítica en subintervalos y no en todo el intervalo de definición. Para introducir el problema de aproximar estas funciones debemos comenzar haciendo una clasificación adecuada a nuestros propósitos. Una parte considerable de la teoría se ha desarrollado respecto a dos tipos de funciones que tienen en común dos atributos: la analiticidad en un intervalo del eje real salvo en un número finito de puntos; y cumplir en general la propiedad de Newman.

La primera clase de funciones, a las que daremos exclusivamente el nombre de analíticas a tramos, está formada por aquellas funciones que son analíticas en cada subintervalo $I_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,...,\nu$, de una partición de $[a,b]$

$$a=x_0<x_1<...<x_m<x_{\nu+1}=b,$$

pero que no admiten prolongación analítica en los puntos x_k, $k=1,...,\nu$.

Una versión "esencialmente equivalente" de la anterior clase de funciones, es utilizada por el autor en [129] para hallar, aplicando la técnica de Gonchar, un estimado del error para la mejor aproximación racional a tramos que depende de varias características de la función aproximada.(42

Szüsz y Turán están entre los primeros que han tratado de estimar la velocidad de aproximación a funciones con mejores propiedades en subintervalos que en todo el intervalo dominio. Esta es la razón por la cual en esta monografía le hemos llamado ST a esta amplia clase de funciones. Estos matemáticos demuestran en [229] que para funciones que son analíticas a tramos sobre un intervalo I se cumple el siguiente estimado superior.(43

$$\mathcal{R}_n(f,I)_\infty \leq Ce^{-c\sqrt{n}},\ (C>0,c>0). \tag{1.60}$$

El estimado (1.60) se deriva del uso de las técnicas de aproximación por

[41] Ver [208] y la bibliografía contenida.
[42] Ver la proposición 3.1.2 (pág. 132), y el teorema 3.2.2 (pág.139).
[43] Ver también el teorema 6.4 de [159].

tramos, mediante las cuales se obtienen estimados como el siguiente.[(44]

$$\mathcal{R}_m(f,I)_\infty \leq C\left\{\sum_{k=1}^{s+1}\mathcal{R}_n(f_k,I_k)_\infty + e^{-\sqrt{n/2}}\right\}, \tag{1.61}$$

donde $m=\kappa n$, $\kappa\in\mathbb{N}$, f_k es la restricción de la función f al subintervalo I_k, de la partición $\{x_i\}$ de $[a,b]$.

Observemos que, la convergencia geométrica de los primeros $s+1$ sumandos del estimado (1.61), cede ante el término $e^{-\sqrt{n/2}}$.

El siguiente resultado permite apreciar con detalles el carácter de la convergencia puntual mediante funciones racionales.

Teorema de Levin, Maimeskul y Saff (Teorema 4.1 de [148])
Sea $\phi(x)$ una función continua a la derecha y no decreciente sobre $[0,1]$, con $\phi(0)=0$, tal que

$$\int_0^1 \frac{\phi(x)}{x}dx < \infty. \tag{1.62}$$

Si f es una función analítica a tramos sobre $[-1,1]$ de la clase $C^{k-1}[-1,1]$, $k\geq 1$, entonces existen funciones racionales $R_n\in F_{n,n}$, $n=1,2,...$, tales que para todo $x\in[-1,1]$

$$|f(x)-R_n(x)| \leq C\exp\left(-c\sqrt{kn}-cn\phi(d(x))\right), \tag{1.63}$$

donde $d(x)$ denota la distancia de x a la más cercana singularidad de f sobre $[-1,1]$. Las constantes c, C son independientes de x y n, y c es también independiente de k.

La condición (1.62) impuesta a la función $\phi(x)$ (continua a la derecha y no decreciente sobre $[0,1]$ con $\phi(0)=0$) es necesaria para poder obtener velocidad geométrica de los aproximantes racionales $R_n(x)$ a una función dada f, que es continua y analítica a tramos sobre $[-1,1]$, pero no es analítica sobre $[-1,1]$. Para más detalles ver el teorema 4.2 de [148].

En el artículo [148] se conceptualiza por primera vez a la clase de las funciones f del tipo de *Gonchar-Szabados* ($f\in GS$). Este nombre fue dado en reconocimiento a los trabajos de Gonchar [97] en 1967 sobre la aproximación racional de funciones con singularidades características,[(45] y a los notables resultados de Szabados [223, 224, 225] en los años 1968-69. La clase GS conjuga los aspectos básicos de ambas teorías y es la segunda de las que hemos anunciado anteriormente. A continuación damos su definición.

[44] Ver el teorema 6.3 de [159].
[45] La generalización de los resultados de [97] aparecen en el capítulo 2.

Definición de la clase Gonchar-Szabados (GS) *Decimos que $f \in GS$ si $f \in C[-1,1]$ y para una partición $\{x_i\}_{i=1}^{\nu}$, la restricción de f a cada intervalo abierto (x_i, x_{i+1}) tiene una continuación analítica y acotada a algún rombo R_i con vértices opuestos x_i, x_{i+1}, $0 \leq i \leq \nu$.*

El teorema 3 de [225] muestra que para $f \in GS$ se tiene que

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty = \mathcal{O}(\omega(f, e^{-t_n})), \tag{1.64}$$

donde t_n satisface la relación

$$\omega(f, e^{-t_n}) = t_n e^{-cn/t_n}, \quad c = c(f). \tag{1.65}$$

El lector puede encontrar notables relaciones entre los resultados del capítulo 2 y (1.64-1.65). Debe ver además, si es posible, los artículos [97, 122, 124].

Szabados [223] define de la siguiente forma a la clase de funciones analíticas en $I \backslash \{x_i\}_{i=1}^{\nu}$, donde I es un intervalo. Decimos que $f \in D(M/\delta, \nu, I)$ si f es continua en I y analítica en cada intervalo

$$I_k(\delta) = [x_{k-1} + \delta, x_k - \delta],\ k = 1, .., \nu + 1;$$

con

$$0 < \delta < \min_{1 \leq k \leq \nu+1} \frac{x_k - x_{k-1}}{2},$$

y cumple la condición siguiente

$$\max_{1 \leq k \leq \nu+1} \limsup_{n} \frac{\sqrt[n]{\max_{x \in I_k(\delta)} |f^{(n)}(x)|}}{n} \leq \frac{M}{\delta}.$$

En [223] se prueba el siguiente estimado.

Teorema B de Szabados *Si $f \in D(M/\delta, \nu, [-1,1])$ entonces existen funciones racionales $r_n(x)$ de orden a lo más n para las cuales se tiene que*

$$\|f - r_n\|_\infty = \mathcal{O}\left(\omega\left(f, \exp\left(-\sqrt[3]{n \log(1/q)/(5\nu)}\right), [-1,1]\right)\right), \tag{1.66}$$

donde

$$q = \frac{\sqrt{M^2 e^2 + 4Me} - Me}{2},\ 0 < q < 1.$$

Ejemplos 1.2.1 *Las funciones $f(x) = |x|^\alpha$ y $f(x) = x \log |x|$ ambas pertenecen a $D((e\epsilon)^{-1}, 2)$, y tienen módulo de continuidad $\omega(f, \delta) = \delta^\alpha$ y $\omega(f, \delta) = \delta |\log \delta|$ respectivamente.*

Del teorema B de Szabados se deduce que para la segunda función del ejemplo 1.2.1, los órdenes de aproximación polinomial y racional son $\mathcal{O}(\log n/n)$ y $\mathcal{O}(\exp(-d\sqrt[3]{n}))$ $(d>0)$, respectivamente.

La teoría de [129] apunta hacia la construcción de un tipo de aproximante óptimo cuya afinidad estructural con las funciones analíticas en $[a,b]\backslash\{x_i\}$, alivie el efecto nocivo de las singularidades. Con este propósito surge la clase de funciones formada por funciones que admiten una prolongación analítica al espacio de Hardy $H^p(D_i)$, $1\leq p\leq\infty$, donde D_i es el disco de centro $(x_i+x_{i+1})/2$ y radio $(x_{i+1}-x_i)/2$, en cada subintervalo I_i, $i=1,...,\nu+1$. Esta clase de funciones, que denotamos por $H^p_\nu[a,b]$, fue introducida por el autor en [129] a los efectos de estudiar el orden de convergencia de la mejor aproximación racional a tramos. En el capítulo 3 aparecen los principales resultados de [129] con sus correspondientes demostraciones. Una de las principales conclusiones que puede extraerse de estos trabajos es que la aproximación racional a tramos es más eficiente que el tradicional esquema racional de una pieza. Un ejercicio sencillo pero muy importante para nuestro trabajo, consiste en comprobar que

$$H^p_\nu[a,b]\subset D(M/\delta,\nu,[a,b])\cap GS.$$

El teorema 4.1 de [148], enunciado anteriormente en esta sección, aparece extendido en el mismo artículo a la clase GS. Antes de enunciarlo tenemos que hacer algunas suposiciones adicionales. Una de las principales consiste en asumir que el conjunto de las singularidades de la función $f\in GS$ es exactamente

$$S_f=\{x_0=-1,x_1,...,x_{\nu+1}=1\},$$

con la posible excepción de los puntos extremos x_0 y $x_{\nu+1}$.

Ahora recordemos que la clase GS consta de aquellas funciones cuya restricción a cada intervalo (x_i,x_{i+1}), $i=0,...,\nu$, admite prolongación analítica y acotada a un rombo D_i con vértices opuestos en los puntos x_i y x_{i+1}. Supongamos adicionalmente que f admite extensión continua a la clausura de $D=\cup_{i=0}^{\nu}D_i$, y definamos el módulo local de continuidad de f sobre S_f, con respecto a A, $A\subset\overline{D}$, de la siguiente forma

$$\omega^*(f,A,t):=\max_{x_j\in S_f}\ \max_{|z-x_j|\leq t,z\in A}|f(z)-f(x_j)|.$$

Decimos que $f\in GS^*$ si además se tiene que

$$\int_0^1\omega^*(f,\overline{D},t)\frac{dt}{t}<\infty.$$

En [148] se demuestra el siguiente resultado para la clase GS^*

Extensión del teorema de Levin, Maimeskul y Saff a la clase GS *Sea ϕ una función que cumple (1.62) y tal que*

$$\phi(2x) \leq (2-\alpha)\phi(x),$$

para x suficientemente pequeño y algún $0 < \alpha < 1$. Dada $f \in GS^*$, existen $R_n \in F_{n,n}$, $n = 1, 2, ...$, tales que

$$|f(x) - R_n(x)| \leq C \exp\{-cn(t_n^{-1} + \phi(d(x)))\}, \quad x \in [-1, 1],$$

donde t_n está definida para valores de n suficientemente grandes por

$$\omega^*(f, [-1, 1], t) = \exp\left(-\frac{c_1 n}{t_n}\right),$$

y $d(x)$ es la distancia de x a S_f.

Verdaderamente un estimado general no uniforme, válido para una clase de funciones, no suele estar expresado como (1.58) y (1.59). La propia condición de ser general, hace que este estimado dependa de las características estructurales de cada función en particular, expresadas generalmente en términos de un módulo de continuidad o suavidad. En este sentido debemos citar los teoremas directos de Jackson [19, 63] para la aproximación polinomial, el teorema B de Szabados [223]-estimado (1.66)- y los resultados de A. Gonchar [97] para el caso racional.[(46]

Teorema de Gonchar *Sea f una función en el espacio de Hardy H^∞, tal que f es continua en $[-1, 1]$. Entonces*

$$\mathcal{R}_n(f, [-1, 1])_\infty = \mathcal{O}\left(\inf_{t\geq 1}\left\{\omega(f, e^{-t}, [-1, 1]) + t\exp\left(-\frac{nc_0}{t}\right)\right\}\right), \tag{1.67}$$

donde

$$\omega(f, \delta, [a, b]) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x - y| < \delta,\ a \leq x, y \leq b\}$$

es el módulo uniforme de continuidad de f, y $c_0 > 0$ es una constante absoluta.

El módulo de continuidad uniforme, que aparece en el estimado (1.67), explica parcialmente, y en términos estructurales, el orden de aproximación racional a la función f. Este término es especialmente sensible al comportamiento de la función f cerca de los extremos del intervalo, donde es posible que ésta tenga

[46]Se establece como premisa una propiedad estructural de la función, y se concluye acerca de una característica constructiva como es la velocidad de convergencia. No deben confundirse con los problemas directos de la Matemática Computacional. Van Wickeren [237] ha extendido la versión uniforme de los teoremas directos e inversos para los polinomios de Bernstein.

singularidades. La sucesión $\exp(-nc_0/t)$, que aparece afectando aditivamente al módulo de continuidad en (1.67), surge debido a la abundante analiticidad de f en cada subintervalo $[a,b] \subset]-1,1[$. Es fácil concluir que, en el estimado (1.67) la selección de sucesiones admisibles t_n, con $\lim_n t_n = +\infty$, queda obviamente restringida a la condición $\lim_n n/t_n = +\infty$.

Szabados [225] publicó en el año 1969 una generalización del Teorema de Gonchar, que además mejoró el estimado (1.66) del Teorema B de Szabados.

Teorema C de Szabados *Sea $\{x_i\}$ una partición*

$$-1 = x_0 < x_1 < ... < x_s = 1,$$

del intervalo $[-1,1]$. Asumamos que $f(z)$ es analítica y acotada sobre los discos D_i de centro $(x_i + x_{i-1})/2$ y radio $(x_i - x_{i-1})/2$, $i = 1,2,...,s$, y continua sobre $[-1,1]$. Entonces

$$\mathcal{R}_n(f,[-1,1])_\infty = \mathcal{O}\left(\inf_{t \geq \sqrt[3]{n}} \left\{\omega(f, e^{-t}, [-1,1]) + t\exp\left(-\frac{n\delta c_1}{st}\right)\right\}\right), \quad (1.68)$$

donde $c_1 > 0$ y $\delta = \min_{1\leq i\leq s}(x_i - x_{i-1})$.

Sea $(D_i)_{i=1}^s$ la colección de discos del teorema C de Szabados. Si $f \in H^p(D_i)$, $i = 1,2,...,s$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces decimos que f es de clase H^p_{s-1}. Esta última es una extensión natural de la clase definida en el teorema C de Szabados, que ha sido investigada por el autor en [129].

El lector puede comprobar que el estimado superior de la mejor aproximación racional a tramos de $f \in H^p_{s-1}$, dado por el teorema 1 de [129] no empeora al decrecer el parámetro δ, o al aumentar s, tal como ocurre obviamente en (1.68).[(47]

La aproximación uniforme sobre compactos contenidos en la región de analiticidad de una función f, mediante funciones racionales, tiene un orden exponencial que depende de la geometría de la región. Para precisar consideremos una región abierta U del plano complejo, con frontera ∂U regular para el problema de Dirichlet. Sean F y E dos compactos del plano ampliado tales que $E \cap F = \emptyset$. Por $\text{cap}(E,F)$ se representa a la capacidad del condensador plano (E,F). Si $E \subset U$ es compacto, Widom [243] demostró que

$$\lim_n \sup_f \mathcal{R}_n(f,E)_\infty^{1/n} = \exp\left(-h(E,\partial U)\right), \quad (1.69)$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones f analíticas en U, con

[47] Ver el teorema 3.2.1 del capítulo 3.

norma supremo menor que uno, y

$$h(E, \partial U) = \frac{1}{\operatorname{cap}(E, \partial U)}$$

es el módulo del condensador plano $(E, \partial U)$.

Es justo señalar que el estimado (1.69) tiene importantes antecedentes en los trabajos de Walsh, Levin, Tikhomirov y Gonchar. Por otra parte, la sucesión $\sup_f \mathcal{R}_n(f, E)_\infty$ de (1.69) está vinculada al diámetro n-dimensional de un compacto y al n-grosor de Kolmogorov.[(48] La versión lineal de este último ha sido utilizada por Wilderotter [244] para obtener resultados de aproximación uniforme a funciones $f \in H^\infty$, sobre compactos del disco unidad, mediante operadores lineales de rango finito P_n^* que son asintóticamente óptimos en el sentido del n-grosor.[(49] El método utilizado en [244] para construir los algoritmos P_n^* es de carácter constructivo y permite estimar el error en los siguientes términos.

$$\sup_{f \in A} \|f - P_n^*(f)\|_{E,\infty} \leq \exp\left(\frac{-n}{\operatorname{cap}(E, D)}\right) 2(1 + \mathcal{O}(1/n^\alpha)),$$

donde A es la bola unidad de H^∞, E es un compacto en el disco unidad D, $\|\cdot\|_{E,\infty}$ es la norma uniforme sobre E y $\alpha > 0$ es un parámetro relacionado con la suavidad de la frontera de E.

De manera más general, si E es unión finita de compactos conexos del plano ampliado y f es holomorfa sobre E, el número $q = q(f, E) \in]0, 1[$, dado por

$$\limsup_n \{\mathcal{R}_n(f, E)_\infty\}^{1/n} = q,$$

es la principal característica del orden de aproximación racional de f sobre E. Uno de los problemas más importantes de la teoría es la estimación de q y el estudio de su conexión con la prolongación analítica de estas funciones.[(50] Las siguientes líneas ofrecen al lector información más precisa sobre este tema.

Sea F un compacto contenido en $\mathbb{C} \backslash E$. Si f es holomorfa sobre el conjunto abierto D, $E \subset D = \mathbb{C} \backslash F$, entonces se tiene que

$$q(f, E) \leq \exp(-h(E, F)). \tag{1.70}$$

El módulo de holomorficidad h de la función f, holomorfa sobre E, es la mejor estimación de $q(f, E)$ en (1.70). Se define como

$$h := \sup\{h(E, F) : \ F \in \mathcal{F}\},$$

[48] Hemos traducido n-grosor por n-width.
[49] A los operadores lineales de rango finito se les llama en [244] algoritmos lineales.
[50] Sobre este tema puede consultarse [100].

donde $\mathcal{F}$ es la clase de todos los conjuntos compactos F tales que f es holomorfa en E y admite prolongación analítica y uniforme a $\mathbb{C}\backslash F$. Las magnitudes $q = q(E, F)$ y h, $0 \leq h \leq \infty$., están ligadas por la desigualdad

$$q \leq e^{-h}. \tag{1.71}$$

Un problema consiste en determinar si existe un único compacto regular $F_f \in \mathcal{F}$, para el que $h(E, F_f) = h$. En tal caso el conjunto abierto $D_f = \mathbb{C}\backslash F_f$ es la región de analiticidad maximal de f. En general la igualdad no se alcanza en (1.71). Para funciones que se prolongan a regiones del tipo $\mathbb{C}\backslash F$, con F de capacidad logarítmica cero, se tiene que $q = 0$. El planteamiento uniforme de (1.69) produce la exactitud del estimado porque al menos una $f \in H^{\infty}(U)$ tiene a ∂U como frontera natural.

Parece que Gonchar [103] fue uno de los primeros en demostrar que $q = e^{-2h}$ se satisface para una amplia variedad de funciones. El método de demostración seguido en [103] se ha basado en el uso de los aproximantes multipuntuales de Padé que más adelante definimos en la página 57.

El efecto adverso producido por las singularidades de la función aproximada f, es presuntamente atenuado en el caso racional por la conducta que en cada caso manifiestan los polos de los aproximantes óptimos. En [96, 104, 119] se aprecia cuál debe ser el comportamiento de los polos de las fracciones aproximantes respecto a las singularidades de f, cuando se considera un esquema de aproximación racional "eficiente". En general los polos son atraidos por las singularidades de f, en el sentido de que para todo compacto K contenido en la región de analiticidad de f, los polos del aproximante no pertenecen a K a partir de cierto rango.(51

Los resultados teóricos anteriormente descritos se corresponden con el estudio de la diagonal principal de la tabla de Walsh: $(\mathcal{R}_n(f)_\infty)_{n=0}^{\infty}$.

Para dar un tratamiento generalizado a este problema tomemos a $(m(n))$ como una subsucesión de enteros positivos tal que $\lim_n m(n)/n = \theta \in]0, 1]$. Evidentemente $m(n) = n$ cumple la condición anterior. Decimos que una "sucesión radial"de la tabla de Walsh es la nueva tabla $(\mathcal{R}_{n,m(n)}(f)_\infty)_{n=0}^{\infty}$. Resultados sobre el comportamiento asintótico de sucesiones radiales han sido obtenidos por Levin y Saff [146], Prokhorov [196], y más recientemente por Prokhorov y Saff [197].

Consideremos ahora que la función f tiene una representación en serie de

(51En [102] aparece un resultado básico de esta teoría.

potencias formal

$$f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j.$$

El aproximante de Padé (AP) $[m/n](f) := [m/n]$ de f de orden m, $n = 0, 1, ...$ es una función racional P/Q, P y Q polinomios de grados no mayores que m y n respectivamente, con Q no idénticamente cero, que satisface

$$f(z)Q(z) - P(z) = \mathcal{O}(z^{m+n+1}). \tag{1.72}$$

Los AP toman su nombre en tributo a la memoria del matemático francés Henri Eugène Padé (1863-1953). Sin embargo estos ya habían sido utilizados por G. Frobenius en su tesis doctoral (1870) y en el artículo que posteriormente escribió en 1981 [81]. Curiosamente Frobenius atribuía los AP a la invención de A. Cauchy.(52

En el capítulo 9 de [159] (pag. 276) podemos ver la demostración completa del siguiente resultado

Teorema *El aproximante $[m/n](f) = P/Q$ de una serie de potencias f, existe y es único. Si P^*/Q^* es la representación irreducible de P/Q, entonces tenemos que $Q^*(0) \neq 0$ y*

$$f(z) - [m/n](z) = \mathcal{O}(z^{m+n+1-d}), \tag{1.73}$$

donde $d = \text{mín}(m - gradoP^*, n - gradoQ^*)$ es el defecto de P/Q.

La tabla de Padé asociada a una serie de potencias formal f es el arreglo matricial de funciones racionales que a continuación se muestra.

$$\begin{array}{cccc} [0/0], & [1/0], & [2/0], & \cdots \\ [0/1], & [1/1], & [2/1], & \cdots \\ [0/2], & [1/2], & [2/2], & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{1.74}$$

La primera fila de la tabla (1.74) se corresponde con las sumas parciales del propio desarrollo en serie de potencias.

Los AP interpolan en $z = 0$ a f en el sentido dado por (1.73), con multiplicidad $m+n+1-d$, y por ello tienen relación con la interpolación según Hermite. El llamado ejemplo de Perron muestra que la interpolación en términos de los AP no está exceptúado de tener malas propiedades de convergencia tal como ocurre en otros procesos de interpolación (ver el teorema 2.1 de [159]).

[52] La mayoría de los apuntes históricos los hemos extraído de los libros de Baker [12, 13], Brezinski [42, 44], y de la tesis doctoral de F. Cala [59].

Ejemplo de Perron *Existen funciones enteras f con la propiedad de que los polos de los aproximantes $[m/1](f)$, $m = 1, 2, ...$ forman un conjunto denso en $\mathbb{C}$. Por tanto, la sucesión $[m/1](f)$ no puede converger uniformemente sobre ningún conjunto abierto del plano complejo.*

La convergencia de los AP puede plantearse de diversos modos atendiendo a la forma en que el término general $[m/n]$ se aleja del término $[0/0]$ de la tabla. En la literatura abundan los resultados relativos a los AP que se alejan de cualquier fila, es decir, $m, n \to \infty$, y que no se separan demasiado de las diagonales (ver por ejemplo [61]). Esto último se asume de antemano en términos del comportamiento asintótico de una sucesión del tipo m_n/n.

Se ha demostrado que sobre la diagonal principal $[n/n]$, $n = 0, 1, 2, ...$, los AP pueden manifestar un comportamiento patológico. Wallin (1974) probó que

Resultado negativo de Wallin [240]
Existe una función entera f para la cual cada punto de $\mathbb{C}$ es límite de los polos de la sucesión $[n/n](f)(z)$.

Esta función f tiene la propiedad adicional de que $[n/n](f)(z)$ diverge en cada punto $z \neq 0$ de modo que $\limsup_n |[n/n](f)(z)| = \infty$.

El método usado por Wallin en [240] fue más tarde aplicado por Lubinski en ([160],1983) para establecer contraejemplos a la extensión de resultados de convergencia, en medida o capacidad, conocidos en aquella época y relativos a interpolantes racionales, AP y aproximantes óptimos racionales.

Stahl [217] publica en 1985 un ejemplo de función de peso $\omega(x)$ para el cual la diagonal de los aproximantes de Padé asociados a la transformada de Cauchy de ω, tienen polos asintóticamente densos en $\mathbb{C}$. Stahl, sin mencionar los trabajos de Wallin [240] y Lubinski [160], señala en [217] que en la teoría de la aproximación de Padé los contraejemplos son tan típicos e importantes como los propios resultados de convergencia.

Quizás el más notable resultado de convergencia de los AP sobre las filas de la tabla (1.74), se debe a Motessus de Ballore.[53] Si f es analítica para $|z| \leq r$, excepto quizás en puntos donde tiene singularidades polares, el teorema de Montessus establece que

$$\lim_{m} [m/n](f)(z) = f(z),$$

uniformemente sobre compactos que no contienen polos, y dentro del disco $|z| < \rho < r$. Este resultado es un ejemplo de convergencia de las filas de (1.74), y de atracción de los polos de la misma, pues los n polos de $[m/n]$ convergen a

[53] Entre otros puede consultarse sobre este resultado a [159], teorema 2.3.

los n polos de f, contando sus multiplicidades.

A pesar del anterior resultado negativo de Wallin, han sido demostrados numerosos teoremas de convergencia para la diagonal principal de (1.74), y para sucesiones "poco.ªlejadas de la llamada diagonal principal $[n/n](f)$.

Esta diagonal de la tabla de Padé ha sido muy utilizada para aproximar las funciones holomorfas de tipo Markov(54

$$f(z) = \widehat{\mu}(z) = \int_I \frac{d\mu(x)}{z - x},$$

donde I es un intervalo acotado o $I = [0, +\infty[$. Si $I = [a, b]$ la función $\widehat{\mu}$ tiene el siguiente desarrollo de Laurent en el infinito.

$$\widehat{\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{z^{\nu+1}}, \tag{1.75}$$

donde

$$c_\nu = \int_a^b x^\nu \, d\mu(x),$$

es el momento ν-ésimo de la medida μ. La determinación del problema de momentos permite diseñar métodos para recuperar a la función $\widehat{\mu}$, usando para ello la información que brinda el desarrollo (1.75). Sin embargo, un desarrollo del tipo de (1.75) para el caso $I = [0, \infty[$ sólo puede plantearse en general de manera formal, y además, el problema de momentos asociado no está siempre determinado.(55 Una característica común, no vinculada al tipo de intervalo, es que los polos de la función racional $p_n/q_n = [n/n](\widehat{\mu})$ son los n ceros simples del enésimo polinomio ortogonal asociado a μ. Es decir, aunque en la teoría general no es posible localizar los polos de los AP asociados a una función cualquiera, para $f = \widehat{\mu}$ podemos asegurar que estos pertenecen a la envoltura convexa del soporte de μ.

Entre 1890 y 1910 aparecieron relativamente pocos resultados sobre la convergencia de los AP. En 1895 Markov [162] publicó uno de los resultados más representativos de esta teoría.

Teorema de Markov *Sea μ una medida finita sobre los conjuntos de Borel de la recta real, cuyo soporte S es acotado. Entonces*

$$[n/n](\widehat{\mu})(z) \to \widehat{\mu}(z), \quad \text{cuando } n \to \infty, \tag{1.76}$$

uniformemente sobre cada subconjunto compacto del dominio $D = \mathbb{C} \setminus \Delta$, donde Δ denota a la envoltura convexa de S.

[54] Algunos le llaman de tipo Stieltjes cuando $I = [0, +\infty[$.
[55] Independientemente de que todos los momentos sean finitos.

La versión cuantitativa del teorema de Markov es bien conocida, y expresa que la convergencia uniforme sobre compactos de $D = \mathbb{C}\backslash\Delta$ es geométrica. Asimismo (1.76) también tiene lugar en el sentido de la convergencia fuera de S en capacidad logarítmica.

El problema relativo a la selección de los polos de los aproximantes racionales de interpolación, tiene dos posiciones extremas. En uno de los extremos está el diseño con polos preasignados estudiado por Walsh [242], considerado básicamente como un esquema de interpolación.[(56] En el lugar opuesto están los AP con polos libres cuya determinación sólo depende de la función y la propia condición de interpolación. Ocupando posiciones intermedias está el aproximante de tipo Padé (ATP), cuyo denominador se expresa como $q_n(z) = t_k(z)\widetilde{q}_{n-k}(z)$, donde t_k se prefija de modo que *grado* $t_k = k$, y $\widetilde{q}_{n-k}(z)$ surge a partir de una condición de interpolación de modo que *grado* $\widetilde{q}_{n-k}$ es a lo más $n-k$. Se trata, por tanto, de aproximantes con polos parcialmente preasignados.

Uno de los problemas que más se ha investigado respecto a los ATP es el relativo a obtener convergencia a funciones meromorfas de tipo Markov $f = \widehat{\mu}+r$, donde r es una función racional con k polos en el plano ampliado. En la serie de artículos [3], [4] y [5] se demuestra que los ATP no sólo complementan a los AP, sino que les superan en aspectos esenciales como los señalados en la página 11 al final de la subsección 1.1.1.

Un resultado reciente sobre la velocidad de convergencia de los ATP a funciones de tipo Stieltjes, puede ser visto en [18]. La característica principal de este trabajo es que el número de polos fijos de los ATP, representa una proporción constante con respecto al orden de los aproximantes racionales. Los resultados de [18] se derivan de la teoría de Rakhmanov sobre el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales asociados a pesos de tipo Freud.

Los AP han sido utilizados con éxito en la tarea de prolongar analíticamente a series de potencias, en regiones fuera de su disco de convergencia, o para sumar series formalmente divergentes [12, 13]. Sin embargo, no se ha encontrado solución a los problemas prácticos que surgen al tratar de estimar el error que se comete al aproximar por medio de AP, a una función definida por su serie de potencias. De hecho, aunque hay casos completamente resueltos (ver [94]), no parece existir una solución general a este problema. Un avance importante en esta dirección fue hecho por Brezinski [43] quien tuvo la idea de extender el método usado por Kronrod para estimar los errores producidos por cuadraturas gaussianas. En [132] se logran superar los escollos prácticos del método de Brezinski, que en esencia consiste en estimar el error $[k-1/k](f) - f$ mediante

[56] En la interpolación polinomial se prefija el grado y con ello se decide el orden del polo en infinito.

$(2k/2k+1)(f) - [k-1/k](f)$.[57]

Aunque los últimos párrafos muestran las ventajas que los especialistas han encontrado en los ATP respecto a los ya clásicos AP, en las próximas líneas retomamos el tema relativo a los segundos debido a su gran importancia teórica.

El primer resultado de convergencia de AP, para el caso en que r tiene polos complejos, fue obtenido por Gonchar.

Teorema sobre aproximación de Padé a funciones meromorfas [101] *Sea μ una medida finita y positiva cuyo soporte está contenido en $[-1,1]$, y tal que $\mu' > 0$ c.d. Entonces el siguiente estimado es válido uniformemente sobre compactos del complemento de $[-1,1] \cup \{z/\, r(z) = \infty\}$.*

$$\limsup_n |f(z) - \pi_n(z)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\phi(z)|^2},$$

donde ϕ es la representación conforme que transforma al complemento de $[-1,1]$ sobre el exterior del disco unidad, y $f = \widehat{\mu} + r$.

Sea f una función holomorfa arbitraria en una región Ω. El AP que interpola a f en una tabla prefijada α de puntos del plano ampliado

$$\alpha = \{\alpha_{n,k} : \; k = 1, ..., k(n) \leq 2n, \, n \in \mathbb{N}\},$$

recibe el nombre de aproximante multipuntual de Padé (AMP) y es considerado como una extensión del AP. Los AMP son también llamados interpolantes racionales, AP en N puntos, o aproximantes de Newton Padé, dependiendo del contexto.[58]

La manera natural de obtener la condición de interpolación respecto a la tabla α consiste en exigir que la función

$$\frac{q_n f - p_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{k(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n,k}}\right)},$$

sea holomorfa en la misma región Ω. El estudio de los AMP ha permitido obtener mediante condiciones de extremalidad exigidas a la tabla α, resultados exactos de convergencia a cero del error

$$\|\widehat{\mu} - [n,n](\widehat{\mu})\|_K,$$

siendo K un compacto contenido en Ω. Para funciones de tipo Stieltjes respecto a medidas con soporte no acotado, los AMP también han ofrecido un enfoque

[57] Observar que hemos usado los corchetes para los AP, y los paréntesis para los ATP.

[58] Ver el capítulo 7 de [13].

alternativo al problema de la convergencia que no depende de la determinación del problema clásico de momentos. Sobre este tema puede ver por ejemplo [104] para el caso holomorfo $f = \widehat{\mu}$, y [101, 119, 152, 155, 157] para el caso meromorfo $f = \widehat{\mu} + r$, donde r es una función racional.

El estudio de la convergencia de los AMP ha sido vinculado al estudio de la distribución límite de los ceros de polinomios que son ortogonales respecto a medidas variantes, lo cual a su vez ha sido considerado en términos de la solución de problemas de la teoría del potencial sobre la distribución de equilibrio en presencia de campos externos. Un clásico sobre este tema es [106]. Resultados más recientes sobre la convergencia débil de medidas variantes, directamente vinculados a los polinomios ortogonales de Hermite-Padé, pueden verse en [67].

El interés creciente por los AP se debe no solamente a sus múltiples aplicaciones, sino también a sus variadas generalizaciones. Además de los AMP, otra de las conocidas extensiones del clásico AP es el aproximante de Padé en dos puntos, la cual surge cuando se trata de obtener un aproximante racional asociado al siguiente desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

convergente en un anillo $r < |z| < R$, considerando por separado los desarrollos en $|z| < R$ $(z = 0)$, y en $|z| > r$ $(z = \infty)$.

Los aproximantes de Padé en dos puntos son especialmente útiles cuando solamente uno o unos pocos términos de una serie están disponibles. Otras de las ventajas reconocidas de estos aproximantes, son: 1) que los miembros sucesivos de la sucesión de fracciones continuas asociadas a estos aproximantes pueden ser obtenidos calculando a lo más dos coeficientes adicionales del desarrollo, 2) facilitan considerablemente el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.

Según refiere McCabe [165], el primero que extendió el concepto de AP al de aproximante de Padé en dos puntos fue G. A. Baker en una nota publicada en el volumen **135** de la Physical Review, del año 1964. Más información respecto a los aproximantes de Padé en dos puntos podemos hallarla en [13, 53, 54, 55, 230], y en la bibliografía contenida en [165].

Los AP, íntimamente vinculados a las fracciones continuas [177] y considerados como una extensión natural del clásico polinomio de Taylor, han encontrado aplicación en diversos campos de la física (consultar [21, 232], los capítulos 22, 23 y 24 de [12], y los capítulos 9, 10 y 11 de [13]), el análisis numérico [110, 143] y la teoría de los números [194]. En particular resulta de gran interés su estrecha relación con las fórmulas de cuadratura (racional) de tipo interpolatorio. Para obtener más información técnica sobre los aproximantes (multipuntuales) de Padé el lector puede leer la introducción de la sección 4.1, y el capítulo 9 de [159].

Entre los numerosas publicaciones que tratan el tema de los AP hemos incluido en la bibliografía algunas de carácter básicamente teórico tales como [5, 13, 42, 44, 45, 59, 96, 102, 103, 104, 108, 119, 120, 121, 123, 141, 151, 153, 154, 161], y otras concernientes a los aspectos numéricos[59] [52, 109, 110, 245]. Sobre la relación existente entre los AP y los polinomios ortogonales el lector puede comenzar su recopilación de datos consultando el capítulo 7 de [12], sin omitir la obra de Nikishin y Sorovkin [177], donde el lector podrá hallar una magnífica introducción a los aproximantes simultáneos de Padé. En estos materiales pueden encontrarse otros apuntes históricos y algunas aplicaciones.

Además de la conocida obra de Walsh [242] sobre aproximantes racionales con polos prescritos, puede verse en [158] cómo este tipo de aproximantes se utiliza para aproximar funciones transferenciales de sistemas dinámicos de dimensión infinita.

Aunque existe una fuerte relación entre la aproximación racional y la aproximación mediante splines en los espacios L^p, $0 < p < \infty$, no le hemos incluido en estas notas por razones de espacio. Los dos resultados básicos de esta teoría pueden verse en el libro de Lorentz [159], y en los artículos [184, 185, 189].

En los párrafos subsiguientes se ofrecerá un breve recorrido sobre la teoría de la integración numérica, incluyendo algunos resultados que muestran las conexiones con la aproximación racional.

1.2.3. La integración numérica

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función integrable Riemann con respecto a una función no decreciente α, también definida sobre el intervalo real I.

El problema de calcular aproximadamente la integral $\int_I f\, d\alpha$, puede ser resuelto mediante el método aproximado de cuadraturas, cuya formulación se muestra a continuación.

$$E_n(f) = \int_I f(x)\, d\alpha(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{1.77}$$

Los coeficientes λ_k son escalares reales o complejos, mientras que los nodos x_k pertenecen al intervalo I o a una región D del plano complejo con $D \supset I$. Generalmente los nodos y coeficientes se seleccionan atendiendo a algún criterio de

[59] Fiabilidad, estabilidad, precisión, eficiencia, uso de la memoria y generalidad.

error establecido de antemano.

La fórmula (1.77) es interpolatoria o de interpolación si $E_n(p) = 0$ para todo polinomio p cuyo grado no sobrepasa un cierto número natural r. Decimos entonces que (1.77) tiene grado de exactitud r.

Las fórmulas del paralelogramo, el trapecio y de Simpsom son ejemplos bien conocidos de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio.

Si el intervalo I es acotado, este criterio de exactitud se corresponde con la posibilidad de aproximar uniformemente cualquier función continua por medio de polinomios algebraicos. En el caso no acotado, es decir, cuando I tiene extremos a y b, $a < b$, y $a = -\infty$ ó $b = +\infty$, el concepto de exactitud polinomial requiere adicionalmente de la finitud de todos los momentos $c_\nu = \int_I x^\nu d\alpha(x)$.

Si p_n es el polinomio de Lagrange de grado $\leq n-1$, que interpola a la función f en los puntos x_k, $k = 1, ..., n$, entonces la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \int_a^b p_n(x)\, d\alpha(x),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.78}$$

define en (1.77) una fórmula de interpolación con grado de exactitud no menor que $r_n = n - 1$. En este caso los coeficientes se calculan mediante la fórmula

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{q_n(x)}{q_n'(x_k)\,(x - x_k)}\, d\alpha(x), \tag{1.79}$$

con $q_n(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$; o mediante el sistema

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^m = \int_a^b x^m\, d\alpha(x),\ n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.80}$$

A los efectos del cálculo numérico, el sistema (1.80) es más apropiado que la fórmula (1.79).

En lo que sigue nos referiremos siempre al intervalo de integración $[-1, 1]$, ya que mediante el cambio de variable $u = (b-a)x/2 + (a+b)/2$ podemos obtener de nuevo a la integral sobre $[a, b]$.

Otra forma de definir la exactitud de la fórmula (1.77), consiste en asegurar que

$$\lim_n E_n(p) = 0, \tag{1.81}$$

para todo polinomio p.

Un planteamiento más flexible de la fórmula (1.77), que usaremos en lo que sigue, se obtiene si consideramos las siguientes tablas triangulares

$$X = \{x_{n,k};\ k = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}\},\ \ \Lambda = \{\lambda_{n,k};\ k = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

de nodos y coeficientes respectivamente.

La exactitud algebraica es en general más exigente que la exactitud en el límite (1.81). Por otra parte, si r_n es la sucesión de exactitudes algebraicas de (1.77), es relativamente fácil ver que si

$$\sup_n \sum_{k=1}^{n} |\lambda_{n,k}| < \infty, \text{ y } \lim_n r_n = \infty,$$

entonces $\lim E_n(f) = 0$, para toda $f \in C[a, b]$.

Fórmulas de Newton-Cotes.

Los nodos equidistantes, a pesar de no producir en general métodos discretos eficientes, son utilizados en el diseño de los métodos de cuadratura numérica que reciben el nombre de "Newton-Cotes". Para hallar la forma general de estas reglas de integración consideremos para cualquier natural $n \geq 1$, el llamado paso $h = (b-a)/n$, y la tabla $x_{n,k} = a+kh$, $k = 0, 1, ..., n$, asociada al intervalo $[a, b]$.[(60] La consideración de estas tablas uniformes tiene ciertas ventajas, ya que con ellas se facilita el diseño de esquemas anidados y de fórmulas compuestas. Además, resulta más simple la aplicación o deducción del método de extrapolación de Richardson.

Mediante el cambio de variable $x = x_0 + sh$, $dx = hds$, aplicado a los polinomios $l_k(x)$ definidos en (1.14), se obtiene

$$L_k(s) = \frac{s(s-1)...(s-k+1)(s-k-1)...(s-n)}{k(k-1)...(1)(-1)...(k-n)},$$

de modo que si p es el polinomio de Lagrange (1.15) resulta

$$\int_a^b p(x)dx = (b-a) \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} p(x_{n,k}), \tag{1.82}$$

donde los coeficientes

$$C_{n,k} = (1/n) \int_0^n L_k(s)ds,$$

reciben el nombre de "números de Cotes", y satisfacen (ver [82])

$$C_{n,k} = C_{n,n-k},\ \ \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = 1.$$

[60]Se trata de una fórmula cerrada. La versión "abierta" tiene lugar para $k = 1, ..., n-1$.

Si consideramos el caso $n = 2$ obtenemos a la fórmula de Simpson.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{6}f(x_{2,0}) + \frac{4}{6}f(x_{2,1}) + \frac{1}{6}f(x_{2,2})\right),$$

mientras que para $n = 1$ obtenemos los coeficientes $C_{1,0} = C_{1,1} = 1/2$, de la conocida fórmula de los trapecios.

La manera tradicional de estimar el error asociado a fórmulas interpolatorias, consiste en asumir la existencia de las derivadas del integrando f hasta un orden mayor que el de la cuadratura, y entonces utlizar la fórmula de Taylor con resto. Por ejemplo, si se trata de la fórmula de Simpson aplicada a n subintervalos, podemos considerar que $f \in C^4[a,b]$ para obtener que (ver [82])

$$|E_n(f)| \leq (b-a)\frac{h^4}{180}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

El uso de las derivadas de orden superior en la obtención de estimados superiores, impone exigencias de tipo estructural que obviamente no todas las funciones integrables satisfacen. Para fórmulas compuestas de Newton-Cotes, Popov [188] obtuvo estimados generales del error en términos del módulo de suavidad definido con diferencias k-ésimas. Resultados de este tipo también pueden verse en [131], donde se generalizan estimados clásicos del error para fórmulas como la de los trapecios, válidas para cualquier función de L_p definida donde quiera.

Fórmulas de Gauss.

El problema de hallar la tabla de nodos X en la fórmula (1.77), para obtener el grado máximo de exactitud, fué resuelto por Gauss [86, 87] a principios del siglo XIX, al demostrar que estos son los n ceros del enésimo polinomio ortogonal asociada a la distribución $d\alpha(x)$. El caso más general, con nodos múltiples, fué investigado por Tschakalov [233] en 1954.[(61]

El método de Gauss ha sido uno de los principales métodos numéricos para calcular integrales con singularidades. El procedimiento en términos generales es el siguiente. Sea $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ la integral cuyo valor tenemos que aproximar. El integrando se descompone en dos factores $g(x) = f(x)w(x)$; donde f es una función continua, y w contiene las singularidades de g, que asumiremos sin perder generalidad, que están situadas en los extremos del intervalo de integración. Ahora calculamos los ceros de los polinomios ortogonales respecto

[61]Un tratado clásico sobre polinomios en la circunferencia unidad e intervalos acotados es el de G. Szëgo [228]. El caso relativo a intervalos no acotados puede verse en Freud [79]. El trabajo referativo de Gautschi [89] es uno de los más completos sobre las cuadraturas de tipo Gauss, aunque sólo abarca el período 1965-1980.

a la distribución de medida $d\alpha = wdx$, y mediante el sistema (1.80) obtenemos los coeficientes $\lambda_{n,k}$, $k = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, de la fórmula (1.77).(62

Las fórmulas de cuadratura gaussianas son especialmente eficientes al ser aplicadas a integrandos analíticos. Es decir, cuando consideramos uno de los dos siguientes casos:

1. la función f del párrafo anterior es una función analítica en los puntos de $(-1, 1)$, y tiene singularidades en alguno de los extremos del intervalo,(63

2. la función f es analítica en una región abierta y simplemente conexa G del plano complejo, que contiene a $[-1, 1]$.

El primer caso, que incluye a los espacios H^p, $1 \leq p \leq \infty$, aparece estudiado en [7, 8, 17, 28, 125, 149, 150, 174], mientras que el segundo, que representaremos por $f \in \mathcal{A}(G)$, puede verse en [118, 121, 123, 128, 183, 202, 203, 204].

¿Cómo medir la eficiencia de las cuadraturas gaussianas al ser aplicadas a funciones analíticas? Petras [183] ha respondido a esta pregunta comparando la velocidad de convergencia de las cuadraturas gaussianas con la velocidad de las fórmulas óptimas del tipo de Bahvalov [10], cuya forma está dada a continuación.

$$S_n^B(f) = \sum_{\nu=1}^{m} (a_\nu \Re f(x_\nu) + b_\nu \Re f'(x_\nu) + c_\nu \Im f(x_\nu) + d_\nu \Im f'(x_\nu)) +$$

$$+ \sum_{\nu=m+1}^{n} (a_\nu \Re f(x_\nu) + b_\nu \Re f(\overline{x}_\nu) + c_\nu \Im f(x_\nu) + d_\nu \Im f(\overline{x}_\nu)), \tag{1.83}$$

donde $f \in \mathcal{A}(G)$, $x_1, ..., x_m$ son números reales y $x_{m+1}, ..., x_n$, al igual que los coeficientes a_ν, b_ν, c_ν, y d_ν, $\nu = 1, ..., n$, son números complejos. Para obtener (1.77) basta poner $n = m$, $b_\nu = d_\nu = 0$, y $a_\nu = c_\nu$.

En [183] se concluye que las fórmulas gaussianas son asintóticamente óptimas cuando son aplicadas a funciones abundantemente analíticas, es decir, $f \in \mathcal{A}(G)$, siendo G el interior de una región conformemente equivalente a una elipse.(64

En efecto, para precisar comencemos considerando la condición de optimalidad para las fórmulas del tipo (1.83). Es decir, dado el error en la clase $\mathcal{A}(G)$,

[62] Existen procedimientos bastante generales para calcular los ceros de los polinomios ortogonales respecto a una medida dada.

[63] Si no se dice lo contrario, a lo largo de este libro entendemos por singularidad de una función f, un punto donde f no admite prolongación analítica.

[64] Hay que agregar algunas hipótesis adicionales según [183].

definido por

$$E(S_n^B, \mathcal{A}(G), \alpha) = \sup_{\|f\|_G \le 1,\, f \in \mathcal{A}(G)} \left| \int_{-1}^{1} f(x) d\alpha(x) - S_n^B(f) \right|, \tag{1.84}$$

donde $\|f\|_G = \sup_{z \in G} |f(z)|$ y $S_n^B(f)$ está dada por (1.83), se considera el ínfimo de (1.84) para todas las posibles cuadraturas (1.83) de orden n. Es decir

$$E_n(\mathcal{A}(G), \alpha) = \inf_{S_n^B} E(S_n^B, \mathcal{A}(G), \alpha).$$

La sucesión de pérdidas de una cuadratura particular S_n se define como

$$\mathcal{P}(S_n, \mathcal{A}(G), \alpha) = \frac{E(S_n, \mathcal{A}(G), \alpha)}{E_n(\mathcal{A}(G), \alpha)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Se dice que una sucesión de cuadraturas (S_n) está cercana al óptimo si la sucesión de pérdidas $\mathcal{P}(S_n, \mathcal{A}(G), \alpha)$, está acotada.

En [183] se demuestra que las cuadraturas gaussianas están cercanas al óptimo para $f \in \mathcal{A}(G)$, en el sentido dado en el párrafo anterior, cuando G es el interior de una elipse cuyos focos coinciden con los extremos del intervalo.

Diversos resultados sobre el orden de convergencia del error $|E_n(f)|$ para fórmulas gaussianas pueden hallarse en [63, 80, 90, 121, 118, 142, 198, 199, 200].

Uno de los más significativos inconvenientes de las fórmulas gaussianas es la propiedad de que los nodos $x_{n,k}$ se entrelazan al variar n [79, 228]. Es decir, entre $x_{n,k}$ y $x_{n,k+1}$ hay un único nodo $x_{n+1,j}$, con lo cual se hace imposible el diseño, al menos de forma directa, de un método anidado con fórmulas gaussianas.[(65] Sin embargo, la llamada fórmula de Gauss-Kronrod es un modelo basado en la regla de Gauss de orden n, que mejora los resultados obtenidos por ésta al permitir el cómputo de una segunda aproximación de orden $2n+1$, que sólo utiliza $n+1$ valores funcionales nuevos. Las ventajas económicas de éstas fórmulas las han convertido en la base de muchas rutinas de cuadratura con posibilidades prácticas de estimar el error. La bibliografía sobre las cuadraturas de Gauss-Kronrod es muy extensa por lo que nos limitamos a citar el artículo de Ehrich [73] y la recopilación de Gautschi [89].

El siguiente resultado clásico nos muestra que la exactitud en el límite tiene lugar para las cuadraturas de Gauss, aplicadas a una amplia clase de funciones.

Teorema de Stieltjes [221]
El error $E_n(f)$ para cuadraturas de tipo Gauss converge a cero ($n \to \infty$) para toda función continua sobre $[a, b]$.

[65]Los métodos o algoritmos anidados permiten ahorrar tiempo y memoria porque utilizan los cálculos efectuados en los pasos anteriores.

El teorema de Stieltjes expresa que las medidas atómicas

$$\lambda_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \delta_{x_{n,k}},$$

concentradas en los nodos de la fórmula gaussiana, y con los coeficientes positivos $\lambda_{n,k}$, dados por las fórmulas (1.79) y (1.80), convergen débilmente a $d\alpha$.[66] Lo cual equivale a la convergencia fuerte (1.76) dada por el teorema de Markov (ver la página 55, y la teoría del capítulo 4).

El principio de las fórmulas de Gauss puede ser extendido a sistemas linealmente independientes de funciones no polinomiales[67] $U = \{u_1(t), u_2(t), ...\}$, $t \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo), de modo que U tenga envoltura lineal densa en un espacio de funciones adecuado. Ya Stieltjes [222] en 1884 había propuesto el esquema de exactitud máxima para las funciones

$$u_r(x) = x^{\alpha(r)}, \;\; 0 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < ...,$$

sobre $[0, 1]$. El planteamiento general de este problema consiste en conseguir la integración exacta de tantas funciones $u \in U$ como sea posible. Si las primeras $2n$ funciones u_j hacen exacta la fórmula decimos entonces que se trata de una fórmula gaussiana respecto al sistema U (ver [89]). Un caso especialmente importante es cuando consideramos que las u_j son funciones racionales. Para este esquema racional hay dos enfoques diferentes en general, que están excelentemente tratados en [53, 57, 236].[68]

En general el comportamiento asintótico de la distribución de los puntos $x_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, cuando $n \to \infty$, está descrito en [25, 26] en el caso de fórmulas interpolatorias convergentes para toda función continua, no necesariamente gaussianas. Para explicar con precisión estos resultados consideremos a la sucesión de probabilidades atómicas

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_{n,k}},$$

donde δ_{x_0} es la delta de Dirac en $x = x_0$, y μ_n tiene masa $1/n$ en cada punto $x_{n,k}$. En [25] se demuestra que para fórmulas interpolatorias, convergentes para toda función continua en $[-1, 1]$, se cumple que

$$d\mu_n(x) \xrightarrow{*} \frac{1}{2}(v(x)dx + d\nu(x)),$$

[66] Se demuestra que $\lambda_{n,k} > 0$.
[67] Polinomios generalizados.
[68] Ver la página 68

donde

$$v(x)dx = \frac{1}{\pi}(arcsen\, x)'dx = \frac{dx}{\pi(1-x^2)^{1/2}},$$

y ν es una medida de probabilidad arbitraria sobre $[-1, 1]$.

Los ejemplos más conocidos de fórmulas de cuadratura, convergentes para todo integrando continuo, cumplen que $\nu \equiv 0$.

En [24] se prueba la existencia de cuadraturas interpolatorias convergentes cuyos nodos tienen una distribución asintótica prefijada. La demostración de este resultado se basa en la teoría de los polinomios ortogonales respecto a medidas variantes [104, 154, 156].

Sobre la construcción de ejemplos de funciones continuas o analíticas para las cuales la fórmula interpolatoria de Newton-Cotes diverge, pueden consultarse [166] y la bibliografía que contiene.

Sea ahora un espacio seminormado $\mathcal{X}$, cuyos elementos son funciones que cumplen los requisitos de la fórmula (1.77), y supóngase además que los funcionales lineales S_n y L son continuos. El error de la fórmula (1.77) en el espacio $\mathcal{X}$, está dado por

$$E_n(\mathcal{X}) = \sup\{|E_n(f)|, \|f\| \leq 1\} = \|L - S_n\|. \tag{1.85}$$

Uno de los problemas asociados a (1.85) consiste en probar la existencia de coeficientes y nodos de modo que $E_n(\mathcal{X})$ sea el menor entre todas las posibles elecciones del funcional S_n, manteniendo fijo el orden n. Tales cuadraturas extremales son llamadas “óptimas 2 su estudio parece haber sido iniciado al final de la década de los años cincuenta.[69]

El problema extremal relativo a la fórmula (1.77) y al espacio $\mathcal{X}$ ha sido planteado principalmente en los siguientes casos: $\mathcal{X} = W_r^q$ es el espacio de Sobolev de la funciones f, con derivada f^{r-1} absolutamente continua y tal que $f^r \in L_q$ ([30, 31, 35, 36, 145]); cuando $\mathcal{X} = H$, es un espacio de Hilbert de funciones analíticas ([17, 202, 203, 204, 10]); y para $\mathcal{X} = H^p$, $1 \leq p \leq \infty$ ([7, 8, 17, 27, 33, 149, 150, 174]).

La mayoría de los resultados obtenidos en esta línea son relativos al problema de la existencia y unicidad de los nodos y coeficientes óptimos ([8, 17, 32, 33, 35, 111, 179]); a las propiedades de estos últimos ([149, 202, 203]); y a los teoremas de representación para el error óptimo y su orden de convergencia a cero ([7, 8, 27]).

[69] El libro de Nikolski [179] es un clásico de la literatura matemática sobre cuadraturas. La cuarta edición, traducida al castellano, contiene un apéndice de N.P. Korneichuk sobre cuadraturas extremales. Ver también [211, 178].

Un resultado exacto, de gran valor teórico, lo constituye el siguiente debido al matemático sueco J. E. Andersson [7].[(70]

Teorema de Andersson *Para $f \in H^p$, $p > 1$, sea la fórmula de cuadratura siguiente*

$$S_n(f) - \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = E_n(f),$$

donde

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f^{(j-1)}(z_i).$$

Entonces

$$\lim_n \left(\inf\left\{|E_n(H^p)|, S_n\right\}\right)^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{q}}\right), \tag{1.86}$$

donde $q = p/(p-1)$.

Nótese que si $d\mu = \chi_{[-a,a]} dx,\ 0 < a < 1$, se deduce de [121] que

$$\limsup_n \left(\inf\left\{|E_n(H^p)|;\ S_n\right\}\right)^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right), \tag{1.87}$$

para todo $p, 1 \leq p \leq \infty$, donde C_a es la capacidad logarítmica del condensador plano $(|z| = 1, [-a, a])$. Este tipo de problema está tratado en la proposición 2.3.1 (página 108) y en el teorema 4.1.6 (página 181).

Salta a la vista el grado de coincidencia que hay entre (1.86)-(1.87) y los resultados expuestos en la primera parte sobre la aproximación racional de funciones.

La demostración de (1.86) está basada en gran parte en el siguiente teorema de representación [27, 150]

$$\inf_{S_n} |E_n(H^p)| = \inf_{B_n} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_{-1}^{1} f(x) B_n(x)\, dx \right|, \tag{1.88}$$

donde $f \in H^p$, $p > 1$, $\|f\|_p$ es la norma de f en el espacio H^p y el ínfimo se toma sobre todos los productos de Blaschke B_n de orden n.

La igualdad (1.88) jugó un papel muy importante en el estudio de las fórmulas óptimas de cuadratura en los espacios H^p, $p > 1$, que excepto para $p = 2$, no son isométricamente isomorfos al espacio dual.

Las investigaciones sobre las fórmulas óptimas en el espacio H^∞ comenzaron a principios de los 70 con Bojanov [27]. En el caso general de los espacios H^p,

[70] En esta dirección también debe consultarse [8].

$1 < p \leq \infty$, Loeb y Werner [150], usaron (1.88) y la técnica desarrollada por Newman [172] para obtener estimados superiores del error óptimo.[71]

Newman [174] por su parte modificó aspectos de su primer trabajo [172] para mejorar los estimados hallados por Loeb y Werner.

Uno de los aspectos más significativos de esta breve historia- sólo duró seis años- es que Andersson [7] renunció parcialmente a la ingeniosa técnica de Newman, y probó el resultado exacto (1.86) al reducir el cálculo del estimado superior del error óptimo a un problema propio de la aproximación racional. La teoría de los AMP utilizada por Andersson, a la cual llega por la vía del núcleo de Cauchy, se debe a A. Gonchar y G. López [104].

La relación existente entre las fórmulas de cuadratura y la aproximación racional, establecida por medio del núcleo de Cauchy, es el tema central del capítulo 4 de esta monografía, el cual a su vez está basado en los artículos [126, 127, 120, 123] de López Lagomasino y el autor. Esta conexión, que ya había sido considerada por Gauss [87] en 1814, aparece mencionada en [215], en el contexto del llamado problema de momentos. En [90, 107, 108, 120, 121] se muestran algunas de sus posibles aplicaciones en la obtención de resultados teórico experimentales de la integración numérica. En la última década del siglo XX se publicaron trabajos como [53, 54, 55, 56, 57, 134], en los cuales se utiliza al núcleo de Cauchy para conectar a los polinomios de Laurent[72] con ciertas fórmulas racionales de cuadratura naturalmente asociadas a los primeros.

Una presentación aparte merece el problema de aproximar integrales respecto a medidas complejas. En ([107], 1995) se considera a la siguiente integral.

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx, \tag{1.89}$$

donde ω es una función de valores complejos que satisface

$$\int_{-1}^{1} |\omega(x)|\,dx = M < \infty,$$

y la función f es analítica sobre una vecindad del intervalo $[-1, 1]$.

El problema de aproximar (1.89) ya había sido considerado bajo severas restricciones por Nuttall y Wherry [182] en 1978, de modo que los pesos del tipo

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C};\ Re\,\alpha,\ Re\,\beta > -1, \tag{1.90}$$

no habían sido incluidos en su totalidad. Uno de los propósitos de [107] ha sido el diseño de cuadraturas racionales de interpolación con nodos múltiples,

[71] Básicamente el lema de Newman (pag. 37).
[72] Este es un esquema lineal de funciones racionales.

asociadas a los ATP, para las cuales se garantiza convergencia respecto a los pesos (1.90).

El tratamiento dado por [236] a las fórmulas de cuadratura racionales de interpolación permite apreciar algunos aspectos anatómicos que diferencian a estas últimas de las conocidas polinomiales. Consideremos el problema de aproximar al valor de la integral (1.89) siendo $\omega(x)$ una función de peso, positiva casi donde quiera sobre $[-1,1]$. La base de interpolantes consiste ahora en la sucesión

$$\frac{1}{1+t_1x},\ \frac{1}{1+t_2x},...,\frac{1}{1+t_nx},...., \tag{1.91}$$

donde t_1, t_2, t_3, ... son parámetros pertenecientes al intervalo abierto $(-1,1)$.

Expongamos los dos enfoques diferentes que ofrece [236] para seleccionar a los nodos de interpolación.(73 Elijamos para el primer caso como nodos a los ceros de la función ortogonal r_{n+1} que se obtiene ortogonalizando al sistema (1.91) respecto al producto escalar

$$(\,f\,,\,g\,) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)dx. \tag{1.92}$$

A la fórmula interpolatoria obtenida por esta vía se le llama *cuadratura ortogonal*. El segundo punto de vista considerado en [236] consiste en seleccionar los nodos de manera que la cuadratura tenga el mayor grado de exactitud posible. Es decir, la siguiente igualdad

$$\int_{-1}^{1} \phi_k(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\phi_k(x_i),$$

se verifica para el mayor valor posible del índice k. A este planteamiento se le llama fórmula gaussiana. Para el caso polinomial ambos enfoques coinciden, mientras que, para el sistema (1.91), estos enfoques dan lugar a fórmulas diferentes.

Tal como se señala en [236], el planteamiento gaussiano generalizado puede establecerse en términos de un sistema de Haar extendido(74 $\{\phi_i : i = 1,...,n\}$ sobre $[-1,1]$.

En [167], un artículo posterior a [236], se muestra un tipo de cuadratura racional de interpolación sobre $[-1,1]$ y respecto al peso $1/\sqrt{1-x^2}$, que son

[73] Que coinciden con los nodos de la cuadratura.

[74] Es aquél que cumple que cada combinación lineal $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$ tiene a lo más $n-1$ ceros en $[-1,1]$, contando sus multiplicidades.

exactas para las funciones racionales siguientes[75]

$$\frac{1}{x-a_1},\ \frac{1}{(x-a_1)^2},\dots,\ \frac{1}{x-a_n},\ \frac{1}{(x-a_n)^2}, \tag{1.93}$$

donde $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}\backslash[-1,1]$.

Entre las características más notables de las cuadraturas de Min [167] están las siguientes:

1. No son cuadraturas gaussianas ni ortogonales (ver [236]).
2. Son positivas. Es decir, los coeficientes λ_k de las fórmulas son todos números positivos.
3. Si $E_n^R(f)$ denota a la mejor aproximación de la función f por medio de combinaciones lineales de las fracciones $1/(x-a_k)$, $k=1,...,n$, en el intervalo $[-1,1]$, entonces el error $E_n^0(f)$ de la cuadratura
$$E_n^0(f) := \left|\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx - S_n(f)\right|,$$
satisface el siguiente estimado superior.
$$E_n^0(f) = \mathcal{O}(E_n^R(f)).$$

El teorema siguiente caracteriza a la convergencia de las cuadraturas de [167].

Teorema 2.5 de [167]
Sea la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}\backslash[-1,1]$. Si definimos $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ por

$$a_k = (c_k + c_k^{-1})/2,\ |c_k| < 1,\ k = 1,...,n, \tag{1.94}$$

entonces son equivalentes las siguientes proposiciones.

$$\lim_n S_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}dx,\ \textit{para toda } f \in C[-1,1]. \tag{1.95}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|c_k|) = \infty. \tag{1.96}$$

Hagamos una breve comparación entre las cuadraturas racionales de interpolación del subepígrafe 2.3.2 y las cuadraturas de [167]. La primera observación es que las cuadraturas de Newman-Gonchar, estudiadas en la subsección 2.3.2, no son positivas. Señalemos también que la condición (1.94), satisfecha por las cuadraturas de [167], es sustituida en el apartado 2.3.2 por la simetría respecto

[75] Sobre la densidad del sistema (1.93) consultar [1, 168].

a una circunferencia entre nodos y polos. Por último, la condición de convergencia (2.63), establecida para las cuadraturas racionales de esta monografía, es similar a (1.96), pero la primera sólo garantiza la convergencia para integrandos de la clase H^p.

Aunque el modelo de las fórmulas de integración de la subsección 2.3.2 está orientado al cálculo numérico, es indudable que también tiene interés teórico en la misma dirección que Min [167].

La formulación que hemos presentado en la sección 4.1 fue estudiada por López Lagomasino y el autor en [120, 121, 123], y está más cercana a la teoría de los polinomios ortogonales y la aproximación multipuntual de Padé que la dada en [236]. En los métodos de integración numérica de la sección 4.1 se fija el número n de fracciones (1.91) y se consideran los polinomios ortogonales respecto al peso o medida modificada.

Sobre la conexión existente entre las fórmulas de cuadratura y los aproximantes multipuntuales de tipo Padé, puede verse también [108]. Respecto al tema general de la integración numérica de tipo racional pueden también consultarse otros títulos como [42, 91].

Las fórmulas de cuadratura han sido también vinculadas con la aproximación mediante splines. No nos extenderemos en esta línea de trabajo que el lector puede ver en [34, 149].

La teoría sobre el problema de momentos ha desempeñado un importante rol en el estudio de las cuadraturas numéricas que aproximan integrales sobre intervalos no acotados. El capítulo 3 de [79] y [56] están dedicados a este tema en el caso de cuadraturas polinomiales positivas sobre la recta real, exactas en el infinito, y definidas para funciones dominadas por polinomios que son integrables en el sentido de Riemann Stieltjes.

La integración numérica se ha estudiado desde otros puntos de vista. Por ejemplo, la consideración de las sucesiones

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}),$$

ha conducido al estudio de las tablas infinitas (ver [79, 120, 195])

$$\Lambda = \{\lambda_{n,k}\} \ y \ X = \{x_{n,k}\}.$$

El tema de la complejidad de las fórmulas de integración numérica es tratado en [66], donde se da a éste un tratamiento matemático conceptual, y se discute la relación existente entre el coste computacional y la exactitud algebraica.

Consideremos por último a las fórmulas de cubatura. Estas son fórmulas específicas para el cálculo aproximado de integrales dobles, que han sido particularmente estudiadas en los últimos años. En el contenido de la sección 4.1 de esta monografía, hemos incluido a estas fórmulas como un caso particular de nuestra teoría. Sobre este tema pueden consultarse [30, 201, 181].

1.3. Las singularidades y los problemas singulares

En el ámbito de las matemáticas es frecuente el uso de los términos "singular", "singularidad", "singularidad débil", etc. En bien sabido que no existe una definición general, que abarque todos los posibles significados que estos términos tienen en las diferentes ramas de la matemáticas. Cuando hablamos de singularidades, del punto singular de una función, o de un problema singular, estamos apelando a un contexto. Nosotros, en lugar de preocuparnos por emitir definiciones generales de dudosa utilidad, trataremos de reconocer la existencia de ciertas características en la estructura de las funciones, y clasificarlas para su estudio. Algunas de estas propiedades singulares, que también debemos asociar a la geometría de las regiones involucradas, afectan de manera adversa al desarrollo de los procesos que conducen a la solución de los problemas, y con frecuencia se localizan en algunos puntos y zonas. Por tanto, dado un problema, una de las principales tareas consiste en diseñar o elegir adecuadamente un método de solución que ofrezca información sobre las incógnitas con una eficiencia aceptable, teniendo en cuenta el papel que juegan estos puntos o configuraciones geométricas excepcionales. La gran variedad de problemas singulares y las dificultades que conlleva obtener su solución, hacen que su estudio, además de atractivo, se convierta en un reto. Actualmente se produce mucha literatura sobre este tema, y es creciente la cantidad de investigadores e ingenieros que están interesados en el desarrollo de nuevas técnicas que permitan abordar la solución de estos problemas ([246]).

En el terreno del análisis numérico la palabra "singularidad"está asociada al mal acondicionamiento de un método de solución o de un algoritmo. En numerosos casos es teóricamente previsible el mal acondicionamiento de un método o algoritmo, como ocurre por ejemplo con el cálculo de la raíz cuadrada de un número positivo muy cercano al cero. El análisis numérico no sólo se encarga de explicar las discrepancias entre los resultados exactos y aproximados. También tiene tareas de diseño que permiten conciliar los resultados de la teoría de la aproximación y el álgebra matricial con las exigencias de la simulación numérica. Cada método numérico tiene previsto un ámbito D de datos dentro del cual debe funcionar y ofrecer los resultados esperados. Sin embargo, o bien estos métodos no funcionan en algunas zonas interiores de D, o descubrimos que además funcionan en zonas exteriores no previstas en la teoría. Como un caso especial mencionemos a los métodos de cuadratura numérica.[(76] Si μ es una medida finita y positiva sobre los conjuntos de Borel de un intervalo $[a,b]$, entonces se demuestra que algunas fórmulas de integración, por ejemplo las gaussianas, convergen para toda función continua en este intervalo.[(77] Sin embargo, es fácil definir funciones continuas para las cuales no es posible obtener resultados numéricos aceptables. En efecto, existen funciones $f \in C^\infty[a,b]$, cuyo soporte está contenido en el intervalo (α,β), siendo α y β, $a < \alpha < \beta < b$, dos números consecutivos del ordenador, y tal que la integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, d(x),$$

tiene un valor positivo muy grande. Es evidente que $Q(f) = 0 \ll I(f)$ cualquiera sea el método numérico $Q(\cdot)$ que utilicemos.[(78]
Un caso particular muy simple es el de la integral impropia siguiente.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{0,99}} = 100. \tag{1.97}$$

La integral (1.97) tiene aproximadamente el 80 % de su masa concentrada en el intervalo $(0, 1/4909093465)$, a la cual no es fácil acceder, aún utilizando esquemas adaptables. Es obvio que $x = 0$ es una singularidad del integrando. Una integral propia como

$$\int_{e^{-10}}^1 \frac{dx}{x} = 10, \tag{1.98}$$

tiene características parecidas a las dadas en (1.97), pero el integrando de (1.98), a diferencia de (1.97), es una función con abundante analiticidad en el intervalo de integración. Para este tipo de función los esquemas polinomiales de integración pueden aspirar teóricamente a converger con una velocidad geométrica. Sin embargo, la presencia de un polo en el integrando, peligrosamente cerca del intervalo de integración, dificulta la obtención de resultados numéricos satisfactorios. El uso de métodos adaptables es inevitable en este caso.[(79] Puede verse fácilmente que la correspondencia entre los datos y los resultados, en este caso

[76] Ver los comentarios sobre el ejemplo 2.80 en la página 122.
[77] Ya se conoce cuáles son estas cuadraturas convergentes para toda $f \in C[a,b]$ y $d\mu = dx$. Ver [24, 25].
[78] El símbolo $a \ll b$ significa que b es "significativamente" mayor que a.
[79] Basados en fórmulas compuestas, consisten en la modificación manual o automática del criterio de subdivisión del intervalo, según el comportamiento experimental del error.

entre los valores del límite inferior x, $0 < x < 1$, y el valor y de la integral (1.99)

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} = y, \tag{1.99}$$

tiene como derivada a $dy/dx = -1/x$, lo que prueba el mal acondicionamiento para $|x|$ muy pequeño. El cero es, sin lugar a dudas, un punto conflictivo o una singularidad para el problema (1.98), porque influye negativamente en la calidad de los resultados numéricos, a pesar de la abundante analiticidad de la función integrando.

En la subsección 2.3.3 se muestra una clasificación (no exhaustiva) de las principales singularidades que aparecen en la integración de funciones.

Para abordar el tema de las singularidades que presentan las regiones atendiendo a las características de su frontera consideremos dos problemas de contorno. El siguiente problema tiene solución clásica.

Hallar una función armónica $u(x, y)$ en la región

$$R = \{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

tal que $u(x, y) = 0$ sobre $\|(x, y)\|_2 = 1$, y $u(x, y) = 1$ sobre $\|(x, y)\|_2 = 2$.

Sin embargo, el problema de Dirichlet no tiene solución si se trata de la región

$$R' = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4, \}\backslash[-1, 1],$$

asumiendo que $u(x, y) = 0$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ y $u(x, y) = 1$ sobre la circunferencia de centro en el origen y radio $r = 2$.

Usando métodos tradicionales o aplicando el principio de Harnack a las soluciones $u_n(x, y)$ de una sucesión de regiones R_n, convenientemente elegida para que $R_n \nearrow R'$, puede llegarse a una solución para el segundo problema que de cualquier modo no está definida en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, donde están precisamente localizadas las singularidades del problema.(80 La configuración de la frontera de la región R, donde debe vivir la solución $u(x, y)$ del problema de contorno, puede restar regularidad desde el punto de vista teórico como es el caso anterior. En general no está garantizada la estabilidad numérica, si para un n suficientemente grande consideramos el problema relativo a alguna de las regiones R_n que invaden a R' en el límite. Tenemos que enfrentar el problema que consiste en construir las regiones R_n, y lograr que éstas se acerquen, cuando $n \to \infty$, de una manera adecuada al intervalo $[-1, 1]$. En principio, el diseño de las regiones R_n podría hacerse de modo que éste abarque la solución de otros

[80] Además, lím $u(x, y) = +1$ o lím $u(x, y) = -1$, dependiendo de que los puntos (x, y) se acerquen al intervalo $(-1, 1)$ por el semiplano superior o inferior, respectivamente.

problemas de contorno cuyas irregularidades en la frontera tengan similitudes con las del caso anterior.

Los problemas establecidos en términos de ecuaciones en derivadas parciales elípticas están, muy frecuentemente, afectados por singularidades. Citemos, de acuerdo con [246], algunas situaciones de tipo general que producen puntos singulares.[81] Si Ω es la región donde debe estar definida la solución de nuestro problema, los "puntos esquina"de su frontera $\partial\Omega$ pueden ser singulares, especialmente si se trata de una esquina cóncava. Cerca de este punto las derivadas de la solución se hacen infinitas. Otra situación conducente a singularidades es la imposición de diferentes condiciones de contorno. La intersección de estos tramos de frontera puede ser también una singularidad, si en el límite no coinciden las funciones de contorno en este punto común. También es posible que el problema de contorno simule la presencia de dos materiales diferentes en el dominio. La zona de contacto entre las respectivas interfases deviene en un conjunto de singularidades. Por último citemos los problemas de contorno con dominio no acotado, para los cuales el infinito es siempre considerado de antemano una singularidad.

En el tema de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos encontramos que en general los ceros del coeficiente $a_n(x)$ de la ecuación diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = F(x),$$

son también considerados puntos singulares.[82]

La estrategia a seguir para el estudio sistemático de problemas con singularidades contempla una definición precisa del tipo de singularidad cuya presencia está prevista en los datos del problema, así como la estructura de las funciones o regiones que las contienen.

Las secciones 1.2.2 y 1.2.3 muestran algunas direcciones de trabajo dentro del tema de la aproximación de funciones que son analíticas salvo en algunos puntos de su dominio. Las mencionadas técnicas y resultados representan contribuciones al tema de los problemas directos e inversos, cuando estos tienen como datos funciones con ciertos tipos de singularidades. La teoría expuesta en esta monografía está dirigida hacia el uso del esquema racional de aproximación, para el diseño de métodos de solución de problemas con singularidades. Las líneas siguientes tratan brevemente acerca de las diferentes clases de problemas y los métodos generales para obtener la correspondiente solución.

[81] La influencia de las singularidades en el método de los elementos finitos puede verse en [117, 227].
[82] Sobre las singularidades en las ecuaciones diferenciales pueden consultarse [22, 6, 246].

La Matemática Numérica clasifica a los problemas de acuerdo con la ecuación

$$Lx = y, \tag{1.100}$$

donde L es un operador que actúa entre los espacios normados X e Y. Si L es lineal existe a disposición de los especialistas una teoría unificada, a diferencia del caso no lineal que aún se basa en una teoría fragmentada según el tipo de operador L que se considere.

Si los datos sobre L y x están dados, y el término y (output), es la incógnita, se clasifica el problema como **directo**. El cálculo de una integral definida o el cálculo del valor de una función trascendente en un punto dado, son dos ejemplos típicos de problemas directos.

Hay dos grandes estrategias de solución para los problemas directos. El problema original $Lx = y$ se discretiza y se convierte en $Lx_n = y_n$, $n \in \mathbb{N}$, donde x_n converge en un sentido débil al vector x, y Lx_n puede ser calculado mediante rutinas sencillas.[(83] La segunda estrategia de solución consiste en aproximar a Lx mediante una sucesión $L_n x$.

Los problemas inversos consisten en hallar información acerca del vector x, conociendo a L y a y. Estos son considerados los más importantes de la Matemática Numérica. Son de este tipo las ecuaciones integrales y diferenciales, y las ecuaciones algebraicas y trascendentes. Aquí es también inevitable subclasificar los problemas en lineales y no lineales, según el operador L cumpla o no esta condición. La existencia del operador inverso L^{-1} nos garantiza la existencia y unicidad de la solución x pero, salvo el interés que puedan tener algunas propiedades del mismo, es poco usado en la solución del problema (1.100).

La estrategia general de solución de un problema inverso consiste en construir adecuadamente cierta sucesión de problemas

$$L_n x_n = y_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.101}$$

cuyas soluciones respectivas x_n, deben tener como límite, en algún sentido prescrito, a la solución del problema original. El operador L_n se define sobre X_n, y toma valores en Y_n, siendo ambos espacios normados de dimensión finita. En general X_n no es un subespacio de X, por lo que es imprescindible definir un procedimiento que permita construir a la solución definitiva $\widetilde{x} \in X$ en términos de $x_n \in \mathbb{R}^n$.

La siguiente desigualdad

$$\|x_n - x\| \leq \|L_n^{-1}\|\ \|y_n - y\|,\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.102}$$

[83]Aquí decimos de una manera imprecisa que los aproximantes $x_n = x_n(x)$, convergen débilmente a x, cuando éstos en su diseño utilizan relativamente poca información acerca del límite x.

nos da la condición suficiente por excelencia que garantiza la convergencia del método (1.101).

Teorema 1.3.1 *Si el método (1.101) cumple las siguientes propiedades*

1. L_n^{-1} *existe y es continuo para todo* $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_n y_n = y$,
3. $\sup_n \|L_n^{-1}\| < \infty$,

entonces es convergente.

El lector puede apreciar que la prueba del teorema 1.3.1 es inmediata a partir de (1.102), y que la propia desigualdad (1.102) no tiene sentido si no se verifica la primera condición del teorema 1.3.1.

La tercera propiedad del teorema 1.3.1 es conocida como la estabilidad del método (1.101).

La solución de (1.101) se reduce a la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas. La importancia del Álgebra Matricial Numérica radica en que son pocos los problemas que al ser discretizados no se expresan en términos de la solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Finalmente, cuando el operador L es desconocido, hallar información sobre el mismo es conocido como resolver un **problema de identificación**.

Los problemas de identificación, que en una primera etapa fueron clasificados junto a los inversos, tienen características especiales.[(84] Generalmente están mal planteados en el sentido de Hadamard, por lo cual su solución se establece en términos de una condición optimal. El ajuste mínimo cuadrático de una recta a una nube de puntos, pertenece a esta categoría de problemas. En general tenemos el llamado **criterio de error en la ecuación** que se formula en términos de obtener L_0 tal que

$$\|L_0 x - y\| = \min\{\|Lx - y\|,\ L \in \mathfrak{L}\},$$

donde $\mathfrak{L}$ es el conjunto de parámetros seleccionado por el investigador y $\|\cdot\|$ es una seminorma correspondiente al tipo de información que se desea obtener de la solución exacta. El resultado L_0 se adopta como solución del problema original.

En lo sucesivo llamaremos problema singular, a aquél cuya formulación contiene datos en forma de funciones analíticas en una región del plano, excepto en conjuntos que pueden ser despreciados.[(85] Generalmente las características

[84] Consultar por ejemplo [14].
[85] Conjuntos de contenido, medida o capacidad cero.

de los datos de un problema se trasmiten a la solución del mismo. Es por ello que nuestro objeto de estudio es la aproximación racional de ciertas clases de funciones analíticas, que eventualmente están asociadas a los problemas que en este libro hemos considerado singulares.

El siguiente problema de identificación puede ser resuelto mediante el método de aproximación estudiado en el capítulo 3 de esta monografía (ver [112]).

Un problema singular de identificación *Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$w^{(2)} + f\,w + F = 0, \tag{1.103}$$

con valores frontera $w(a) = w_a$, $w(b) = w_b$*. Los valores perturbados* $\widehat{w}(\xi_k)$, $\widehat{w}^{(2)}(\xi_k)$, $\widehat{F}(\xi_k)$, $k = 1,..,m$*; están dados como datos, y* f *es una función analítica a tramos desconocida.*

La componente espacial de la ecuación de ondas bidimensional tiene la forma de (1.103) con $f = k^2$ y $F \equiv 0$. Si sustituimos en (1.103) al parámetro k por p/h y asumimos que $p^2/2m = T = E - V(x)$, donde m es la masa de una partícula, T es la energía cinética, E es la energía total y $V(x)$ la energía potencial, entonces obtenemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Lo anterior explica la costumbre de llamar potencial al coeficiente f de la ecuación (1.103). El papel que desempeña la ecuación (1.103) en la física de ondas aparece excelentemente explicado en el libro de Nettel [171].

La ecuación (1.103) se aplica en ingeniería civil para calcular la deflección $w = w(x)$ de una viga de sección transversal rectangular que está sujeta por los extremos y soporta una carga uniforme. En este caso

$$f = -S\,E^{-1}\,I^{-1}, \text{ y } F = -q\,x\,(x-l)\,0{,}5(E\,I)^{-1},$$

donde esta letras representan las siguientes magnitudes.

- x : distancia al extremo izquierdo de la viga.
- l : longitud de la viga.
- q : intensidad de la carga uniforme.
- E : módulo de elasticidad.
- S : fuerza por unidad de área en los extremos.
- I : momento de inercia central.

Las condiciones de contorno $w(0) = w(l) = 0$ indican que no hay deflección en los extremos de la viga.

Cuando la viga es de grosor constante, la ecuación (1.103) es de coeficientes constantes. Por tanto, atendiendo a la formulación polinomial del término F, es sencillo obtener la solución exacta. No obstante, en muchas aplicaciones el grosor de la viga no es uniforme, lo cual se expresa diciendo que el momento de inercia I, y por ende f, dependen de la variable x. La presencia de singularidades en el coeficiente f se interpreta como la aplicación de fuerzas puntuales sobre la viga. Los valores experimentales de w se pueden obtener en la práctica mediante un instrumento llamado flexómetro.

Hallar información sobre el parámetro f, es un problema de identificación con singularidades cuando se asume que el estado real de la naturaleza f, es una función analítica en $[a, b]$ salvo quizás en los puntos del conjunto $\{a, x_1, ..., x_\nu, b\}$, cuya localización exacta se desconoce. En principio, se dice que una solución ha sido obtenida cuando alguna información específica sobre f ha sido hallada, especialmente aquella relacionada con las singularidades.

Las expectativas que razonablemente podemos establecer sobre la conducta de los polos, cuando se consideran aproximantes óptimos, han sido tenidas en cuenta al seleccionar un método racional en [112]. Por otra parte, el esquema a tramos parece ser conveniente al tratar con funciones reales cuyas singularidades bajo interés están todas contenidas en el intervalo $[a, b]$.

Si w es la solución de la ecuación (1.103), entonces podemos afirmar que la siguiente igualdad

$$|w(f - f_{n,\nu})| = |w^{(2)} + wf_{n,\nu} + F|, \tag{1.104}$$

es el vínculo entre [112] y la teoría tratada en el capítulo 3.

Más detalles sobre la solución numérica de la ecuación (1.103) pueden encontrarse en la subsección 3.4.2.

Otro ejemplo de problema de identificación lo encontramos en [65], donde se presenta un problema no estacionario de propagación de ondas, con aplicaciones a la imagenología médica y la exploración geofísica. El problema, en su versión unidimensional,(86 consiste en considerar una barra o cuerda de longitud L, cuyo velocidad de propagación del sonido depende de la localización. Sea $u(x, t)$ la medida de una perturbación en el momento t, localizada en x. Entonces u satisface la ecuación siguiente

$$u_{tt} = c^2(x)u_{xx}, \quad \text{para} \quad 0 < x < L,$$

donde $c(x)$ es la velocidad del sonido en el medio. Asumamos que el medio

[86] En [65] también aparece el planteamiento bidimensional.

satisface

$$u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0,\ \ 0\leq x\leq L,\ \ \text{y}\ \ u_x(0,t)=f(t)\ \text{para}\ t>0.$$

Adicionalmente supongamos que $f(t)$ es de soporte compacto lejos del momento $t=0$, y que en la parte derecha se cumple una condición de contorno de radiación

$$[u_t-c(x)u_x]|_{x=L}=0.$$

El anterior problema consiste en hallar la incógnita $c(x)$.

El cálculo de una integral definida de una función f, respecto a una medida positiva μ o una función de peso W, puede ser considerado un problema con singularidades atendiendo a las características del integrando. Un ejemplo bastante estudiado es la integral de Riemann de una función con singularidad logarítmica:(87

$$f(x)=g(x)\log(x^2),\ \ x\in[-1/2,1/2],\ \ g\in C^k[-1/2,1/2].$$

Otro caso de integral singular es aquél con núcleo de Hilbert, como el que se ofrece a continuación.

$$(\mathbf{H}f)(t)=\int_0^{2\pi}w(\tau)f(\tau)cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)d\tau,\ t\in[0,2\pi], \tag{1.105}$$

donde w es una función de peso no negativa dada, de período 2π, f es una función periódica de período 2π, y la integral (1.105) está dada en el sentido del valor principal de Cauchy.(88 Las fórmulas llamadas de cuasi-interpolación se aplican en el cálculo de (1.105), y han sido utilizadas por Jinyuan Du [133] para ampliar las posibilidades prácticas de las cuadraturas de máxima exactitud trigonométrica. Consultando las referencias de [133], el lector puede localizar los principales resultados que se han publicado sobre la aproximación de integrales con el núcleo de Hilbert, y sobre la solución de las correspondientes ecuaciones integrales.

Dos amplias clases de problemas inversos muy estudiados, son las ecuaciones integrales de Fredholm con singularidades débiles (ecuación (1.106), y las ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son de clase C^n, y analíticas a tramos [22]. En este libro sólo trataremos los primeros cuyo planteamiento se muestra a continuación.(89

[87] Consultar [62].
[88] Ver el epígrafe 3.2 de [89].
[89] Entre los numerosos tratados sobre las ecuaciones integrales pueden verse, por ejemplo, [11, 193].

Un problema inverso singular *Resolver la siguiente ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea.*

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy = g(x), \tag{1.106}$$

donde el núcleo $K(x,y)$ tiene singularidades de una naturaleza dada en la diagonal $\{(x,x);\ x \in [a,b]\}$, y λ es un valor regular.

En la subsección 2.3.6 se presentan algunos resultados numéricos, obtenidos al tratar de resolver numéricamente las ecuaciones (1.106) mediante fórmulas de cuadratura del tipo racional.

Otro grupo importante de problemas inversos lo constituyen las ecuaciones integrales singulares de Cauchy, cuya forma general es la siguiente.

$$F(x,u(x)) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_a^b \frac{u(y)}{y-x}dy + \int_a^b k(x,y)u(y)dy = f(x),\ x \in (a,b), \tag{1.107}$$

donde $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, b y f son datos, u es la incógnita, y la primera expresión integral de (1.107) está dada en el sentido del valor principal.

Algunas contribuciones recientes sobre la solución de problemas del tipo de (1.107), o de aproximación de integrales de Cauchy, pueden verse en [69, 70, 136, 137, 144]

1.4. Notas al lector

Este epígrafe está dedicado a ofrecer al lector una explicación acerca de la organización y el contenido de los restantes capítulos.

En el capítulo 2 demostramos varios teoremas directos para la mejor aproximación racional en la métrica del espacio $L_p(\mu)$, sobre el intervalo abierto $I_0 = (-1,1)$, a funciones definidas en I_0 que admiten prolongación analítica a la clase H^p, siendo μ una medida de Carleson.(90 En especial, los teoremas 2.2.1 y 2.2.2 son extensiones de los estimados dados por Gonchar en [97], mientras que el teorema 2.2.4 muestra cómo introducir información respecto a la distribución μ, en el estimado del orden de convergencia de la mejor aproximación racional.(91 El capítulo finaliza con la acotación teórica del error de fórmulas de cuadratura que siguen el esquema racional, y el planteamiento de algunos criterios para el diseño numérico de estos métodos racionales.

Uno de nuestros principales objetivos al escribir esta monografía ha sido

[90] Sobre las medidas de Carleson puede verse la sección 1.1.6.

[91] El teorema 2.2.1 fue sugerido por V. A. Popov. Una primera versión de este resultado fue dada en [122].

el de formalizar un concepto de cuadratura racional interpolatoria, que se corresponda con intereses teóricos y experimentales suficientemente generales y divulgar algunas de sus aplicaciones. Una versión de este concepto, no publicada anteriormente, el lector la puede encontrar en el subepígrafe 2.3.2 establecida para intervalos acotados. El caso impropio de primera especie sobre el intervalo $[0, +\infty[$ aparece formulado en la página 110. Esta definición incluye un tipo de fórmulas de cuadraturas que hemos llamado de tipo Newman- Gonchar, y que son estudiadas en 2.3.1 mediante técnicas de la aproximación racional. En 2.3.3 mostramos cómo extender convenientemente estas fórmulas al ámbito numérico experimental para lo cual establecemos un criterio de selección de los nodos, que conserva las ideas básicas de la teoría. Los resultados numéricos que se muestran en este epígrafe permiten apreciar mejor la naturaleza intrínseca de las cuadraturas racionales de interpolación.

El tema de la aproximación racional a tramos con nodos libres está desarrollado en el capítulo 3. La clase aproximada está constituida por funciones continuas en un intervalo I, que además se prolongan analíticamente al espacio H^p en los intervalos I_k asociados a una subdivisión de I. Las singularidades presentes en estas funciones tienen una característica común cuyo tratamiento técnico se inició al estudiar Newman [172] en 1964, la velocidad de convergencia racional a la función $|x|$. Sobre este tema el lector puede consultar también ([173], 1978), ([174], 1979) y ([175], 1981). En el capítulo 3 abordamos técnicamente la solución de estos problemas con el estilo desarrollado por Gonchar [97] en 1967. En esta parte hemos incluido el estudio del correspondiente modelo discreto de aproximación, basado en modificaciones técnicas de la teoría lineal desarrollada en [63]; y hemos demostrado un resultado general relativo a la atracción que ejercen las singularidades sobre los nodos óptimos, que se aplica directamente a las funciones analíticas a tramos, y puede servir de referencia básica en la búsqueda de resultados más profundos. Hemos incluido algunos resultados experimentales para que el lector pueda apreciar las posibilidades prácticas de estos métodos.

Los resultados del capítulo 3, cuyas demostraciones están parcialmente basadas en la técnica del capítulo 2, fueron considerados originalmente con el propósito de resolver un problema de identificación con singularidades que fue planteado durante los seminarios del año 1993, por un grupo de investigadores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla, PUE, Mexico.(92 No obstante, el objetivo básico de este capítulo es seguir la dirección de los trabajos de Szüsz, Turán y Szabados en la teoría de la aproxi-

[92]Consultar la página 75 de la sección 1.2 y el artículo [112].

mación de funciones que tienen mejores propiedades en subintervalos que en todo el dominio de definición. Los teoremas 3.2.1 y 3.2.3 se corresponden con la teoría de Szabados [223] para funciones analíticas en el interior de I_k, mientras que el teorema 3.2.2 sigue el estilo de los trabajos de Szüsz y Turán [229] cuando tratamos de aproximar funciones que son analíticas sobre la clausura de I_k, $k = 1, ..., \nu$. Los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 permiten concluir que cuando tratamos con funciones analíticas a tramos, la aproximación racional por tramos es más adecuada que el tradicional esquema racional de una sola pieza, especialmente si tratamos de localizar singularidades mediante métodos de bajo costo.

El estimado de convergencia dado por el teorema 3.2.2 para los aproximantes racionales a tramos, no representa una novedad teórica. De hecho, puede demostrarse con una técnica muy simple, que los polinomios a tramos alcanzan una velocidad de aproximación geométrica a funciones analíticas a tramos. Sin embargo, el teorema 3.2.2 muestra cómo la teoría de Gonchar puede ser aplicada a la clase de las funciones analíticas a tramos, considerando funciones que se prolongan analíticamente a discos cuyas intersecciones contienen a las singularidades. Esta última clase se denota por $H_{\nu,\epsilon}$ y aparece definida en la página 131. Un resultado cuya validez conjeturamos, es que la distancia entre los nodos del esquema racional a tramos y las singularidades de la función aproximada, tiende a cero más rápidamente que en el caso polinomial a tramos.

La sección 4.1 comienza con la integración numérica sobre intervalos no acotados respecto a integradores variantes. Este enfoque está presente en trabajos previos, realizados por el autor conjuntamente con G. López Lagomasino en el año 1979. En esta parte establecemos un vínculo directo entre la integración numérica y la aproximación racional a través del núcleo de Cauchy $f_z(x) = 1/(z - x)$. De esta teoría hemos derivado un concepto de cuadratura racional de interpolación, cuyo caso gaussiano está directamente asociado a los AMP. El corolario 4.1.1 del teorema 4.1.4 da una condición suficiente de convergencia de los AMP a funciones de tipo Stieltjes, que permite considerar tablas de interpolación con puntos de acumulación en el soporte de la medida.(93 A diferencia de la teoría desarrollada en [79], el teorema 4.1.4 permite obtener convergencia de cuadraturas sin la determinación del problema de momentos clásico. Este tipo de resultado proviene de la teoría de los AMP surgida a finales de la década de los 70, y puede ser visto en [104, 119, 151].

Siguiendo la línea trazada en las páginas anteriores, en la sección 4.1 planteamos la definición 4.1.6 de cuadratura racional de interpolación, correspondiente al intervalo no acotado $I = [0, +\infty[$, y demostramos algunos resultados cualita-

[93]En un trabajo inédito M. Bello encuentra estimados superiores del error utilizando teoría del potencial.

tivos sobre la convergencia de estos métodos definidos respecto a integradores variantes de tipo racional. La teoría de la integración numérica tratada en el capítulo 4 está conectada con la aproximación racional a través del núcleo de Cauchy. El caso particular de la aproximación multipuntual de Padé aparece aquí estudiado con suficientes detalles.

Las cuadraturas de tipo Gauss son tratadas en la sección 4.1. Es por ello que en esa parte hemos incluído el caso gaussiano racional respecto a intervalos $[-a, a]$, $0 < a < 1$. El teorema 4.1.6 consiste en explicar exactamente el comportamiento asintótico del error en la clase H^p.(94 Del teorema 4.1.6 inferimos que la acotación del orden de error para las cuadraturas interpolatorias de Gonchar en la clase H^p, dada por la proposición 2.3.1, mejora cuando el parámetro a se acerca a uno.

Las clases de funciones que son sometidas a un proceso de aproximación en el capítulo 4 están constituidas por aquellas que son representables en términos de la transformada de Cauchy de una medida o una función de L^q. Este tipo de funciones juega un papel relevante en la solución de los problemas de contorno y tienen la característica de que la localización de sus singularidades depende del soporte de la distribución asociada.(95 En la sección 4.2 que a continuación describimos, hemos probado que toda función holomorfa en el plano ampliado menos el disco unidad cerrado, es la transformada de Cauchy de un funcional lineal.

El vínculo existente entre la aproximación racional de funciones analíticas y la convergencia de cuadraturas numéricas, en particular las de tipo racional, parecía no estar suficientemente estudiado en la literatura disponible a principios de los años 80. La sección 4.2 contiene los resultados que el autor publicó entonces con la intención de completar esta teoría, y en él hemos planteado y resuelto problemas como el siguiente. Sea $\mathcal{R}_0$ el conjunto de las funciones racionales con ceros en el infinito y polos en el disco unidad, y sea la fórmula de cuadratura cuya forma general es

$$S_n(f) := \int_{|z|=1} f(z) r_n(z) dz \approx \int_{|z|=1} f(z) g(z) dz,$$

donde $r_n(z) \in \mathcal{R}_0$ tiene un orden no mayor que n, $f \in H^p$, y $g \in L^q(|z| = 1)$, $1/p + 1/q = 1$.

¿Qué relación existe entre la convergencia débil de los funcionales S_n y la convergencia fuerte de las funciones racionales $r_n(z) = S_n(f_z) \in \mathcal{R}_0$.?

---

94 Otros resultados cuantitativos para cuadraturas de tipo Gauss sobre la recta real pueden verse en [80, 199, 200, 198].

95 También reciben los nombres de integrales de Cauchy, funciones de tipo Stieltjes, Markov, etc.

En esta parte demostramos que la convergencia puntual de cuadraturas $S_n(f)$ sobre el espacio H^p, está caracterizada en términos de la convergencia uniforme sobre cada compacto de $r_n(z)$. Además probamos el teorema 4.2.2 donde se muestra la imposibilidad de caracterizar a la convergencia de sucesiones cualesquiera

$$(r_n(z))_{n=0}^{\infty}, \quad r_n(z) \in \mathcal{R}_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

en términos de la convergencia de la sucesión $S_n(f)$, $f \in H^p$. Para obtener este tipo de caracterización por la vía del núcleo de Cauchy f_z, hemos construido un espacio vectorial topológico barrilado $\mathcal{B}$, constituido por clases de funciones analíticas[(96] en el disco unidad cerrado.[(97]

Con el propósito de mostrar otras aplicaciones de la técnica utilizada en la prueba del teorema 4.1.6, el capítulo 4 termina con algunos resultados cuantitativos sobre fórmulas óptimas de cuadratura y su relación con la mejor aproximación uniforme y racional de transformadas de Cauchy.

[96]Series de Borel.

[97]Ver el teorema 4.2.3 y el corolario 4.2.1. El diseño del espacio $\mathcal{B}$ comienza en la página 190.

Capítulo 2

Orden de aproximación racional a funciones de H^p

La técnica de Newman fue modificada y utilizada por varios de sus seguidores. La función $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, es sólo la primera de una larga lista con el atributo común de tener una notable afinidad con los aproximantes racionales, en detrimento de los clásicos polinomios. Gonchar y Szabados no esperaron mucho para ampliar el alcance de las ideas de Newman e introdujeron en la teoría, a finales de los años sesenta del siglo XX, ciertos tipos de singularidades que, casi 30 años después, fueron reconocidas en la literatura dentro de una clase de funciones con nombre propio GS. Para Gonchar un punto $x \in [a, b]$ es una singularidad característica de la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si x está sobre la frontera de un disco donde f admite prolongación analítica. La clase GS admite singularidades interiores, y ha sustituido al disco por un rombo para acercarse más al planteamiento de Szabados.

Cada una de estas clases de funciones se corresponde con un diseño diferente de los puntos singulares. Es natural que la técnica matemática que utilizamos en cada caso también sufra modificaciones, dependiendo estas del “dibujo” de las singularidades y del comportamiento de las funciones en la frontera.

Este capítulo contiene los resultados de la investigación que el autor comenzó en 1985, y muestra un camino, el de los espacios de Hardy, por el cual estas ideas encuentran una continuación natural y productiva.

2.1. Preliminares

Sea μ una medida positiva y finita sobre los conjuntos de Borel del intervalo $(-1,1)$.

Para $f \in L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, definimos

$$\mathcal{R}_n(f,[a,b])_p = \inf \left\{ \|f - r\|_{L_p};\ r \in F_{n,n} \right\},$$

donde $F_{n,m} = \{\, p/q;\ p \in \Pi_n,\ q \in \Pi_m\}$, y Π_n es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual que n.

El número $\mathcal{R}_n(f,[a,b])_p$ recibe el nombre de mejor aproximación racional de orden n, a la función f, en media de orden p. En lo sucesivo escribiremos $\mathcal{R}_n(f)_p$ cuando se trate del intervalo abierto $(a,b) = (-1,1)$.

El efecto de la distribución μ en el orden de aproximación racional a funciones de la clase H^p, es estudiado en este capítulo.[1] Del teorema 2.2.4 deducimos condiciones suficientes (corolario 2.2.2) sobre medidas μ, cuyo soporte coincide exactamente con el intervalo $(-1,1)$, tales que la mejor aproximación racional cumple la siguiente propiedad cuando f satisface cierta condición de Lipschitz.

$$\lim_n \left(\mathcal{R}_n(f)_p\right)^{1/n} = 0.$$

El teorema 2.2.4 basa su demostración en un lema debido a Ganelius [85], y en técnicas de aproximación sobre subintervalos que se solapan (lema 2.2.1).[2]

El problema de la unicidad del mejor aproximante racional no es tratado en esta monografía. Sobre este tema, en el caso del espacio de Hardy $H^2(V)$, $V := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} |\, |z| > 1\}$, deben consultarse [15, 16].

El propósito fundamental de este capítulo es el estudio del orden de aproximación racional en la métrica de $L^p(\mu)$, a funciones $f \in L^p(\mu)$ que admiten prolongación analítica en la clase H^p.[3] El tipo de resultado que aquí obtenemos, es conocido en la literatura como teorema directo o de tipo Jackson, y representa una generalización de resultados clásicos de Gonchar [97] sobre la

[1] La influencia del integrador en la aproximación polinomial en L_p, está estudiado en [130].

[2] El lema de Ganelius que aquí se menciona aparece enunciado en la página 93.

[3] Sobre la teoría de los espacios H^p pueden consultarse [72], [116] y la Sección 1.1.6.

aproximación racional de funciones analíticas y acotadas en un disco.

En esta parte introducimos un módulo integral de continuidad, cuya definición se ajusta naturalmente a las funciones del espacio H^p, y al esquema técnico sugerido por Gonchar en [97].

El carácter de los resultados que demostramos en la primera y principal parte del capítulo, hacen posible hallar de forma directa, nuevos estimados para el error de fórmulas de cuadratura en los espacios H^p, en términos del módulo integral de continuidad de orden p. Por esta vía establecemos nuevas conexiones entre la aproximación racional de funciones analíticas y la integración numérica.

En todo el capítulo asumimos que μ es una medida finita y positiva sobre la σ álgebra boreliana del intervalo $(-1, 1)$. Suponemos además que D es el disco unidad $\{z;\ |z| < 1\}$; que $c, c_0, c_1, \ldots$, son constantes absolutas y positivas; y si f es una función sobre $(-1, 1)$, $f_h(x) = f((1-h)x)$, $0 < h < 1$, $-1 < x < 1$.

Definición 2.1.1 *Sea M_p, $1 \leq p \leq \infty$, la clase de las medidas μ tales que para toda $f \in H^p$, $f|_{(-1,1)} \in L^p(\mu)$.*

Es simple comprobar que M_∞ coincide con la clase de todas las medidas. De lo anterior y del teorema 3.13 de [72] (desigualdad de Féjer-Riesz) tenemos que la medida de Lebesgue $d\mu = dx$, pertenece a M_p para todo p, $0 < p < \infty$.

El teorema de Carleson[4] nos permite asegurar que M_p está constituido en general por una amplia variedad de elementos. En particular, M_p contiene a toda medida concentrada en un compacto de $(-1, 1)$.

Definición 2.1.2 *El módulo integral de continuidad de orden p, $1 \leq p \leq \infty$, de la función $f \in H^p$, asociado a la medida $\mu \in M_p$, está dado por*

$$\omega_p(f, \mu, \delta) = \sup_{0<h<\delta} \|f - f_h\|_{L_p},$$

donde $0 < \delta < 1$.

Proposición 2.1.1 *Sea $f \in H_\infty$. Si el soporte S_μ de la medida μ es un compacto contenido en $(-1, 1)$, o si f es continua en $[-1, 1]$, entonces*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_\infty(f, \mu, \delta) = 0.$$

Demostración *En ambos casos $\omega_\infty(f, \mu, \delta)$ está mayorado por el módulo de continuidad usual de una función continua sobre un compacto, que es bien sabido converge a cero cuando δ tiende a cero.* ∎

[4] Ver [72] teorema 9.3 o el teorema 1.1.14 de la Sección 1.1.6.

Proposición 2.1.2 *Si μ es de Carleson y $1 \leq p < \infty$, entonces para toda función $f \in H^p$, se tiene que*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(f; \mu, \delta) = 0.$$

Demostración *Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$. Existe $h = h(\delta, \epsilon) \in (0, \delta)$ tal que*

$$\omega_p(f, \mu, \delta) < \|f - f_h\|_{L_p} + \epsilon. \tag{2.1}$$

Pero

$$\lim_{h \to 0} \int_{-1}^{1} |f - f_h|^p d\mu = 0, \tag{2.2}$$

cualquiera sea $f \in H^p$. En efecto, por ser μ de Carleson tenemos que

$$\|f - f_h\|_{L^p(\mu)} \leq c \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - f((1-h)e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p},$$

donde $c > 0$.

Del teorema 2.6 de [72], deducimos (2.2), y por tanto si δ es suficientemente pequeño de (2.1) obtenemos la proposición. ■

2.2. Una extensión de la teoría de Gonchar-Newman

El objetivo principal de esta sección consiste en extender los estimados obtenidos por Gonchar en [97] a las funciones de característica acotada en el disco unidad, con la métrica del espacio $L^p(\mu, [-1, 1])$.

Este escenario de los espacios L^p, donde ahora aplicamos las técnicas de Newman y Gonchar, nos permite plantear nuevas interrogantes. Un problema interesante consiste en expresar la influencia de las singularidades en la velocidad de convergencia a cero del error, en términos de una característica de la medida.

2.2.1. El teorema de Gonchar en L^p

Teorema 2.2.1 *Para toda $f \in H^p$, y $\mu \in M_p$, $1 \leq p \leq \infty$, es cierto el siguiente estimado*

$$\mathcal{R}_n(f)_p = \mathcal{O}\left(\inf_{t \geq 1} \left\{ \omega_p(f, \mu, e^{-t}) + t \exp\left(-\frac{nc_0}{t} + \frac{t}{p} \right) \right\} \right), \tag{2.3}$$

donde $c_0 > 0$.

Demostración *La generalización hecha por Gonchar [97] del lema de Newman*[5] *consiste en que para cada* h, $0 < h < e^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *existe una función racional* r_n

$$r_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x - x_n^k}{x + x_n^k} \right), \tag{2.4}$$

donde $x_n := h^{1/n} \in [h, 1)$, *que cumple*

$$|r_n(x)| \leq e \exp\left(- \frac{n}{\log\left(\frac{1}{h}\right)} \right), \tag{2.5}$$

para todo $x \in [h, 1)$.

Definamos $g_n(z) = r_n(x(z))$, *donde* $x(z)$ *es la función racional definida por*

$$x(z) = \frac{h(2(z+1) - h)}{(4 - 3h)(2(1 - z) - h)}. \tag{2.6}$$

Las siguientes propiedades son ciertas.

$$\frac{h^2}{16} < x(-1 + h) \leq x(z) \leq x(1 - h) = 1, \tag{2.7}$$

para $z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq (1 - h)$. *Por otra parte tenemos que*

$$\Gamma_h := \left\{ s;\ |s| = \left(1 - \frac{h}{2}\right) \right\} = \{ s;\ Re\ x(s) = 0 \}, \tag{2.8}$$

y la función racional g_n *verifica el siguiente estimado superior.*

$$|g_n(z)| \leq e \exp\left\{ - \frac{n c_0}{\log\left(\frac{1}{h}\right)} \right\}, \tag{2.9}$$

para $z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq (1 - h)$, *y* $c_0 = 1/(2 \log(4e))$.

Además se cumple que

$$|g_n(z)| = 1, \ \ z \in \Gamma_h. \tag{2.10}$$

Sea $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$. *Para* $z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq (1 - h)$ *definimos*

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_h} \frac{g_n(s)s - g_n(z)z}{g_n(s)s(s - z)} f(s)\, ds. \tag{2.11}$$

La función racional ρ_n *tiene orden* n *e interpola a* f *en los ceros*[6] *de* g_n *y en* $z = 0$.

[5] Aparece en la página 37.

[6] Los ceros y polos de g_n son calculados en el teorema 3.2.1, página 135.

De (2.7-2.11) deducimos que para $z \in \mathbb{R}$, $|z| < (1-h)$, es válida la siguiente desigualdad

$$|f(z) - \rho_n(z)| \leq c_1 \|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right) \exp\left(-\frac{nc_0}{\log\left(\frac{1}{h}\right)} + \frac{\log\left(\frac{1}{h}\right)}{p}\right) = m(n,h,p). \tag{2.12}$$

Luego

$$\|f - (\rho_n)_h\|_{L_p} \leq \|f - f_h\|_{L_p} + m(n,h,p)\|\mu\|^{1/p}, \tag{2.13}$$

donde $\|\mu\| = \mu(-1,1)$.

De (2.13) obtenemos que para $0 < h < e^{-t}$, $t \geq 1$, *se cumple el estimado*

$$\mathcal{R}_n(f)_p \leq c_2 \max\left\{1, \|f\|_p \|\mu\|^{1/p}\right\} \left[\omega_p(f,\mu,e^{-t}) + t\,\exp\left(-\frac{nc_0}{t} + \frac{t}{p}\right)\right],$$

lo que demuestra el teorema. ■

Si $p = \infty$ del teorema 2.2.1 deducimos (1.67).

Sobre la unicidad del elemento de la mejor aproximación puede consultarse [15].

La diferencia entre los estimados (1.67) y (2.3) radica en que el segundo es válido para la clase más amplia H^p, $1 \leq p \leq \infty$, y en que los módulos de continuidad utilizados son diferentes. Los términos exponenciales que perturban aditivamente a los respectivos módulos de continuidad en (1.67) y (2.3), son equivalentes como funciones del parámetro n, pues dentro del intervalo $(-1,1)$ las funciones de H^p, $1 \leq p \leq \infty$, son todas abundantemente analíticas.

De [97] puede deducirse que para n suficientemente grande se tiene que

$$c_0 \approx e^{-1}(1 + \ln 6) \approx 1{,}02703091342.$$

Teorema 2.2.2 *Para todo a, $1 - e^{-1} < a < 1$, se tiene que*

$$\limsup_n \left(\sup_{(f,\mu)} \mathcal{R}_n(f,[-a,a])_p\right)^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{c_0}{\log\left(\frac{1}{1-a}\right)}\right), \tag{2.14}$$

y el supremo se toma sobre todos los pares (f,μ) tales que $f \in H^p$, μ es una medida cualquiera, y $\|f\|_p\,\mu[-a,a]^{1/p} \leq c_3$.

Demostración *De (2.12) obtenemos, poniendo $h = 1 - a$, la siguiente desigualdad*

$$\mathcal{R}_n(f,[-a,a])_p \leq c_1 \mu[-a,a]^{1/p} \|f\|_p \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right)}{(1-a)^{1/p}} \exp\left(-\frac{c_0 n}{\log\left(\frac{1}{1-a}\right)}\right), \tag{2.15}$$

lo que prueba (2.14). ■

Es presumible que el límite superior en (2.14) no dependa del parámetro p, sino únicamente de la geometría de la región $D\backslash[-a, a]$.

2.2.2. Teoremas directos para la aproximación racional

En [97] aparece demostrado el siguiente resultado.

Corolario del teorema de Gonchar *Para todo $\alpha > 0$ se tiene el siguiente estimado.*

$$\mathcal{R}_n(x^\alpha, [0,1])_\infty = \mathcal{O}\left(e^{-C(\alpha)\sqrt{n}}\right), \tag{2.16}$$

donde $C(\alpha) = \sqrt{c_0\,\alpha}$ y c_0 es la constante del teorema de Gonchar.

En la proposición 2.2.2 de esta sección probamos el estimado (2.17), que extiende el anterior corolario a las funciones que cumplen una condición de tipo Lipschitz en los espacios H^p (ver definición 2.2.1). A continuación de la proposición 2.2.2 se presentan dos formas de mejorar el estimado (2.17). La primera se establece a través de una variante del estimado de Newman (1.47) que ha sido obtenida por Ganelius [85], y consiste en aumentar el tamaño de la constante positiva que aparece en el argumento del exponencial en el teorema 2.2.3. La otra dirección es seguida por el teorema 2.2.4 del epígrafe 2.2.3 donde se muestra que existe una característica de la medida μ que influye en la velocidad de convergencia.

Definición 2.2.1 *Sea μ una medida positiva sobre los conjuntos de Borel de $(-1, 1)$. Por $\Lambda^p_\alpha(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$, denotamos a la clase de las funciones $f \in H^p$ tales que $\omega_p(f, \mu, \delta) \le c_4\delta^\alpha$, $0 < \delta \le 1$, siendo c_4 una constante fija.*

Observar que en la definición 2.2.1 no se exige que $f \in L^p(\mu)$, ni que μ sea finita. Sin embargo se infiere que si $f \in \Lambda^p_\alpha(\mu)$, entonces $f(x) - f((1-h)x) \in L^p(\mu)$ para toda $h > 0$ suficientemente pequeña.

Proposición 2.2.1 *Sea $f \in \Lambda^\infty_\alpha(\mu)$. Si $\alpha > 1$ y S_μ tiene interior no vacío, entonces f es constante.*

Demostración *Sea $[a, b] \subset S_\mu$, $-1 < a < b < 1$. Entonces*

$$|f(x) - f_h(x)| \le \omega_\infty(f, \mu, \delta) \le c_5\delta^\alpha,$$

con $h < \delta$, y $x \in [a, b]$. De la anterior desigualdad inferimos que $-xf'(x) = 0$ para $x \in [a, b]$. Como f es analítica en D, concluimos la demostración. ■

El teorema 2.2.1 permite obtener para funciones de la clase $\Lambda^p_\alpha(\mu)$ un resultado análogo al estimado (2.16) dado en el corolario 1 de [97].

Proposición 2.2.2 *Si $f \in \Lambda^p_\alpha(\mu)$ (ver definición 2.2.1) entonces para cierta constante $c(\alpha) > 0$ se tiene el siguiente estimado*

$$\mathcal{R}_n(f)_p = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\, e^{-c(\alpha)\sqrt{n}}\right). \tag{2.17}$$

Demostración *Basta usar 2.2.1 con $t = (n\, p\, c_0/(1 + p\,\alpha))^{1/2}$. En tal caso se tiene que $c(\alpha) = \alpha\,(p\, c_0/(1 + p\,\alpha))^{1/2}$.* ■

El siguiente teorema muestra que el orden del estimado (2.17) puede mejorarse como $\mathcal{O}\left(e^{-c(\alpha)'\sqrt{n}}\right)$ siendo $c(\alpha)' \approx 1{,}096\, c(\alpha)$.

Teorema 2.2.3 *El siguiente estimado uniforme es válido*

$$\sup_{(f,\mu)} \mathcal{R}_n(f)_p = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\exp\left(-\pi\alpha\sqrt{\frac{np}{8(1+\alpha p)}}\right)\right), \tag{2.18}$$

donde (f, μ) es tal que $f \in \Lambda^p_\alpha(\mu)$ (definición 2.2.1) y $\|f\|_p\|\mu\|^{1/p} \le c_6$.

Demostración *Hagamos una modificación a la demostración del teorema 2.2.1.*

El siguiente lema es de Ganelius [85] (ver también [84]).

Lema *Para todo $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe una función l_n*

$$l_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x - a_k}{x + a_k}\right),$$

y $a_k = a_k(n, r) \in (0, 1)$ tal que

$$\max_{0\le x\le 1} x^r |l_n(x)| \le C_r \exp(-\pi\sqrt{nr}), \tag{2.19}$$

y además

$$\sup_{0\le r\le r_0} C_r < \infty,$$

para todo $r_0 > 0$.

Sea $x(z)$ igual que en (2.6). Si $k_n(z) = l_n(x(z))$, entonces de (2.19) y de la propia expresión de $l_n(x)$ podemos deducir el estimado (2.20) y la igualdad (2.21) que se muestran a continuación.

$$|k_n(z)| \le 16\, C_r\, \exp\left(-\pi\sqrt{nr} + 2r\log\left(\frac{1}{h}\right)\right). \tag{2.20}$$

$$|k_n(z)| = 1, \quad si\ z \in \Gamma_h. \tag{2.21}$$

Definamos a $\rho_n(z)$ igual que en (2.11), con k_n en lugar de g_n.

El mismo procedimiento seguido para la demostración del teorema 2.2.1, nos permite probar que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(f)_p \leq M_r\, c(f,p,\mu) \Big[&\omega_p(f,\mu,e^{-t}) \\ &+t\, \exp\left(-\pi\sqrt{nr} + (2r+1/p)\,t\right)\Big], \end{aligned}\tag{2.22}$$

donde

$$c(f,p,\mu) = \text{máx}\left\{1, \|f\|_p \|\mu\|^{1/p}\right\},$$

para todo $t > 0$, estando M_r acotada sobre compactos de $[0,\infty)$.

Sea $m(r)$ definida por

$$m(r) = \pi\sqrt{nr} - (2r+1/p)\,t, \quad 0 < t < \pi\sqrt{\frac{np}{8}}.$$

Tenemos que $m(r) > 0$ si

$$\frac{|\sqrt{r} - \pi\sqrt{n}|}{4t} < \sqrt{\pi^2 n - \frac{8t^2}{p}},$$

y alcanza su valor máximo en

$$r = \frac{\pi^2 n}{16t^2}.$$

Tomemos t de manera que

$$r_n \leq \frac{\pi^2}{16\nu^2},\ 0 < \nu < \pi\sqrt{\frac{p}{8}}.$$

Para $r = r_n$ la desigualdad (2.22) se convierte en

$$\mathcal{R}_n(f)_p \leq M_\nu\, c(f,p,\mu) \inf_{t\geq 1}\left\{\omega_p\left(f,\mu,e^{-t}\right) + t\, \exp\left(\frac{-\pi^2 n}{8t} + \frac{t}{p}\right)\right\}, \tag{2.23}$$

donde el ínfimo lo tomamos para

$$t \in I(n,p,\nu) = \left[\nu\sqrt{n}, \pi\sqrt{np/8}\right),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Sea $t_n = t_n(p,\alpha)$ la solución positiva de la ecuación

$$-\frac{\pi^2 n^2}{8t} + \frac{t}{p} = \xi\pi\sqrt{\frac{n}{8}},$$

con $\xi > 0$ *tal que*

$$\alpha t_n = \pi \xi \sqrt{\frac{n}{8}}.$$

Es simple comprobar que $t_n \in I(n, p, \nu)$ *para un cierto* $\nu > 0$, *y*

$$\xi = \alpha \sqrt{p(1 + \alpha p)^{-1}}.$$

Poniendo $t = t_n$ *en (2.23) obtenemos que para* $f \in \Lambda_\alpha^p(\mu)$

$$\mathcal{R}_n(f)_p \leq M'(\nu) c(f, p, \mu) \sqrt{n} \exp\left(-\pi\alpha \sqrt{\frac{np}{8(1 + \alpha p)}}\right), \tag{2.24}$$

lo que demuestra el teorema. ■

Para α ó p muy grandes, el estimado (2.18) se comporta como

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{n} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n\alpha}{8}}\right)\right).$$

Por otra parte, la dependencia del parámetro p podemos suprimirla voluntariamente en (2.18), ya que

$$\frac{n}{\alpha + 1} \leq \frac{np}{1 + \alpha\, p},$$

para todo $p \geq 1$.

Corolario 2.2.1 *Para* $0 < \alpha < 1$ *sea*

$$a_n^{\sqrt{n}} = \sup\left\{\mathcal{R}_n(f)_\infty;\ f \in \Lambda_\alpha^\infty(dx),\ \|f\|_\infty \leq c_7\right\}.$$

Entonces

$$\exp(-2\pi\sqrt{\alpha}) \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}}\right).$$

Demostración *El estimado inferior es consecuencia de Ganelius [85], ya que* $f_\alpha(z) = c_8(z + 1)\alpha$, $0 < \alpha < 1$, *verifica* $f_\alpha \in \Lambda_\alpha^\infty(dx)$ *(definición 2.2.1) y* $\|f_\alpha\|_\infty \leq c_7$ *para una selección adecuada de* c_8. *El estimado superior lo obtenemos de (2.24) para* $p = \infty$. ■

2.2.3. El efecto de la medida en el orden de convergencia

Definición 2.2.2 *Sea* $M_{\delta,p}$, $1 \leq p < \infty$, $\delta > 0$, *la clase de las medidas* $\mu \in M_p$, *tales que*

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{(1 - x^2)^\delta} < \infty.$$

Ejemplos Denotemos por χ_A a la función indicadora del conjunto A. Es decir,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

Sea dx la medida de Lebesgue en $(-1,1)$, y consideremos a las siguientes medidas

$$d\mu_k(x) = (1-x^2)^k dx, \; con \; k > -1,$$

$$d\mu_a = \chi_{[-a,a]} dx, \; 0 < a < 1,$$

$$d\mu_\sigma(x) = \exp\left(-\frac{1}{(1-x^2)^\sigma}\right) dx, \; \sigma > 0.$$

Es fácil comprobar que para todo p, $1 \leq p < \infty$, se cumplen las siguientes relaciones de pertenencia.

$$dx \in \bigcap_{0<\delta<1} M_{\delta,p},$$

$$d\mu_k \in \bigcap_{0<\delta<k+1} M_{\delta,p},$$

$$d\mu_a, \; d\mu_\sigma \in \bigcap_{0<\delta} M_{\delta,p}.$$

Proposición 2.2.3 *Si $\delta_1 > \delta_2 > 0$, entonces*

$$M_{\delta_1,p} \subset M_{\delta_2,p},$$

para todo p, $1 \leq p < \infty$.

Demostración *Es consecuencia de la monotonía de la integral de Lebesgue, y de que $(1-x^2) < 1$, para $|x| < 1$.* ■

El siguiente resultado extiende al lema 3 de [122].

Lema 2.2.1 *Sea $f \in L^p(\mu)$, con μ una medida positiva y finita sobre la σ álgebra boreliana de $[-b,b]$, $b > 0$. Sean también $I_1 = [-b,a]$ y $I_2 = [-a,b]$, con $0 < a < b$; y r_i, $i = 1,2$, dos funciones racionales tales que*

$$\| (f - r_i) \, \chi_{I_i} \|_{L_p} \leq \beta_1, \tag{2.25}$$

$$\|r_i\|_{L_p} \leq A, \tag{2.26}$$

$$deg\, r_i \leq k_i, \tag{2.27}$$

donde $\beta_1 > 0,\ A > 0,\ k_i \geq 0,\ i = 1, 2,$ *están prefijados.*

Entonces, para cada $\beta_2 > 0$ *existe una función racional* r *tal que*

$$\|f - r\|_{L_p} \leq 6(\beta_1 + \beta_2), \tag{2.28}$$

$$\|r\|_{L_p} \leq 2A, \tag{2.29}$$

$$deg\, r \leq k_1 + k_2 + c_9 \log\left(e + \frac{b}{a}\right) \log\left(e + 2\left[\|f\|_{L_p} + A\right] \beta_2^{-1}\right), \tag{2.30}$$

siendo $c_9 > 1$.

Demostración *Sean* $\beta_2 > 0,\ k > 0$. *Del lema 3 de [97] tenemos que existe una función racional* ρ*, tal que*

$$|\rho(x)| \leq k\,\beta_2,\ para\ x \in [-b, -a],$$

$$|1 - \rho(x)| \leq k\,\beta_2,\ para\ x \in [a, b],$$

$$0 \leq \rho(x) \leq 1,\ para\ x \in (-a, a),$$

$$deg\,\rho \leq c_9\ \log\left(e + \frac{b}{a}\right) \log\left(e + \frac{1}{k\beta_2}\right),$$

con $c_9 > 1$.

Sea k *definido por*

$$k = \left[2^{(p-1)/p}\left(\|f\|_{L_p} + A\right)\right]^{-1},$$

y sea r *la función racional definida por*

$$r = (1 - \rho)\, r_1 + \rho\, r_2.$$

De inmediato es posible comprobar (2.29) y (2.30).

Para probar (2.27) observemos que

$$\|f - r\|_{L_p}^p \leq \|(f - r)\chi_{I_1}\|_{L_p}^p + \|(f - r)\chi_{[-a,a]}\|_{L_p}^p + \|(f - r)\chi_{I_2}\|_{L_p}^p.$$

Por una parte tenemos que

$$\|(f - r)\chi_{I_i}\|_{L_p}^p \leq 2^{p-1}\left(\beta_1^p + \beta_2^p 2^{p-1} k^p \left(\|f\|_{L_p}^p + A^p\right)\right) \leq 2^{p-1}\left(\beta_1^p + \beta_2^p\right), \tag{2.31}$$

$i = 1, 2$. *Mientras que*

$$\|(f-r)\chi_{[-a,a]}\|_{L_p}^p \leq 2^p \beta_1^p \leq 2\left(\beta_1^p + \beta_2^p\right). \tag{2.32}$$

Sumando miembro a miembro (2.31) y (2.32), y teniendo en cuenta que

$$\left(\beta_1^p + \beta_2^p\right)^{1/p} \leq \beta_1 + \beta_2,$$

obtenemos (2.28).

El lema está demostrado. ■

Teorema 2.2.4 *Sean* $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty,\ \delta > 0$, *y* μ *una medida de Carleson tal que* $\mu \in M_{\delta,p}$. *Es válido el siguiente estimado uniforme*

$$\sup_{f\in\Lambda_\alpha^p(\mu),\,\|f\|_p\leq c_{10}} \mathcal{R}_n(f)_p = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\alpha\pi\frac{\sqrt{n\phi p\delta}}{\alpha p+1}\right)\right), \tag{2.33}$$

donde $0 < \phi < 1/2$.

Demostración *Sean* $r = \delta/p$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n > m$. *Sea* $l_n(x) = l_n(x, r)$ *la correspondiente función racional dada por el lema de Ganelius (página 93).*

Definamos

$$x_k(z) = \frac{\left(1 - \dfrac{h}{2} + (-1)^{k+1}z\right)}{2(3-h)\left(\dfrac{3}{4} + (-1)^k z\right)}, \quad k = 1, 2. \tag{2.34}$$

Observemos que

$$x_k\left((-1)^k\left(1-\frac{h}{2}\right)\right) = 0,\ k = 1, 2,$$

y además

$$\frac{h}{21} < x_k((-1)^k(1-h)) \leq x_k(z) \leq x_k\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) = 1,$$

para z *entre* $(-1)^k(1-h)$ *y* $(-1)^{k+1}/2$, $k = 1, 2$.

Sean $I_1 = [-1, 1/2]$, $I_2 = [-1/2, 1]$, *y sea* $\Gamma_{h,k}$ *la circunferencia con centro en el punto* $\left((-1)^k(1-2h)/8, 0\right)$ *y radio* $(7-2h)/8$, $k = 1, 2$.

Podemos verificar que

$$\Gamma_{h,k} = \{s;\ \mathbf{Re}\, x_k(s) = 0\},\ k = 1, 2. \tag{2.35}$$

Para $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$ *sean las funciones racionales*

$$(2\pi i)R_{m,k}(z) =$$

$$\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{\rho_{m,k}(s)T(s,k,h) - \rho_{m,k}(z)T(z,k,h)}{\rho_{m,k}(s)(s-z)T(s,k,h)} f(s)ds,$$

donde

$$T(s,k,h) = \left(s - (-1)^k \left(\frac{1-2h}{8} \right) \right),$$

y $\rho_{m,k}(z) = l_m(x_k(z))$, $z \in [-1+h, 1/2]$ *si* $k = 1$, $z \in [-1/2, 1-h]$ *si* $k = 2$.

Tenemos que

$$\| \left(f - R_{n,k}\right)_h \chi_{I_k} \|_{L_p} \leq M \, \exp(-\pi\sqrt{mr})\, C(z,k,h,m,p,r),$$

donde $C = C(z,k,h,m,p,r)$ *está dada por*

$$C^p = \int_{I_k} \left(\frac{\displaystyle\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{|f(s)||ds|}{U(m,k,s,h)}}{|x_k((1-h)z)|^r} \right)^p d\mu(z),$$

donde

$$U(m,k,s,h) = \left| \rho_{m,k}(s)T(s,k,h) \right|.$$

Luego

$$\| \left(f - R_{m,k}\right)_h \chi_{I_k} \|_{L_p} \leq$$

$$M \, \|f\|_p \frac{\exp\left(-\pi\sqrt{mr}\right) \log\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h^{1/p}} \left(\int_{I_k} \frac{d\mu(z)}{|x_k((1-h)z)|^{pr}} \right)^{1/p}.$$

Las anteriores desigualdades son válidas en virtud de que

$$\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{|ds|}{|s-(1-h)z|} \leq c_{11} \log\left(\frac{1}{h}\right),$$

$$|\rho_{m,k}(s)| = 1, \; si \; s \in \Gamma_{h,k},$$

y la desigualdad (2.19) del lema de Ganelius (página 93).

De esta forma tenemos

$$\| \left(f - R_{m,k}\right)_h \chi_{I_k} \|_{L_p} \tag{2.36}$$

$$c_{12} \|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right) K(k,h,p,r) \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{\log\left(\dfrac{1}{h}\right)}{p} \right),$$

donde

$$K(k,h,p,r) = \left(\int_{I_k} \frac{d\mu(x)}{\left| \left(1-\dfrac{h}{2}\right) + (-1)^{k+1}(1-h)x \right|^{rp}} \right)^{1/p}.$$

Podemos asegurar que

$$K(k,h,p,r) \leq 2^{r+1/p} \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left| \left(1-\frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2x^2 \right|^{rp}} \right)^{1/p}, \tag{2.37}$$

para $k = 1, 2$. *De (2.36) y (2.37) obtenemos*

$$\| (f - R_{m,k})_h \, \chi_{I_k} \|_{L_p} = \mathcal{O}(\beta(m,p,h,r)), \tag{2.38}$$

donde

$$\beta(m,p,h,r) =$$

$$\|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right) \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left| \left(1-\frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2x^2 \right|^{rp}} \right)^{1/p} \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{\log\left(\frac{1}{h}\right)}{p} \right).$$

Es decir

$$\| \left(f - (R_{m,k})_h\right) \chi_{I_k} \|_{L_p} \leq \|f - f_h\|_{L_p} + \mathcal{O}(\beta(m,p,h,r)) = \beta_1. \tag{2.39}$$

Supongamos que $s \in \Gamma_{h,k}$, $k = 1, 2$, *y que escogemos a* z *según la siguiente regla:* $z \in [-1+h, 1/2]$, *si* $k = 1$, $z \in [-1/2, 1-h]$ *si* $k = 2$. *En tal caso tenemos que* $|s - z| \geq h/2$, *para* $h < e - 1$.

Luego, para $k = 1, 2$

$$\| (R_{m,k})_h \|_{L_p} \leq c_{12} \|f\|_p \frac{\|\mu\|^{1/p}}{h} = A. \tag{2.40}$$

Además

$$\textit{orden}\, (R_{m,k})_h = m. \tag{2.41}$$

Notemos que (2.39), (2.40) y (2.41), se corresponden respectivamente con (2.25), (2.26) y (2.27) del lema 2.2.1.

Sean $h_n = e^{-t\sqrt{n}}$ *y* $\beta_2 = \beta_n = e^{-d\sqrt{n}}$, $t, d > 0$ *con* n *suficientemente grande.*

Si $0 < a < b < 1$, *existe* n_0 *tal que si* $n > n_0$ *entonces*

$$n^{-1} c_9 \log(e+2) \log\left(e + 2\beta_n^{-1} \|f\|_p \left(c_{13} + c_{12} \|\mu\|^{1/p} h_n^{-1} \right) \right) <$$

$$a < b < 1 - \frac{2}{n},$$

donde hemos utilizado que $\|f\|_{L_p} \leq c_{13}\|f\|_p$*, porque* μ *es una medida de Carleson.*

Sea m *definida por*

$$m = \left[n - \frac{1}{2} - c_9 \log(e+2) \log\left(e + \frac{2\|f\|_p}{\beta_n}\left(c_{13} + c_{12}\frac{\|\mu\|^{1/p}}{h_n}\right)\right)\right] + 1, \quad (2.42)$$

donde $n > n_0$*, y* $[x]$ *denota aquí a la parte entera de* x*.*

Del lema 2.2.1 tenemos que existe una función racional r *tal que*

$$\|f - r\|_{L_p} \leq 6\left(\beta\left(m, p, h_m, r\right) + \beta_n + \|f - f_{h_m}\|_{L_p}\right).$$

Según (2.42) y el lema 2.2.1, tenemos que para $n > \max\{n_0, m\}$

$$orden\, r \leq 2m + c_9 \log(e+2) \log\left(e + \frac{2\|f\|_p}{\beta_n}\left(c_{13} + c_{12}\frac{\|\mu\|^{1/p}}{h_n}\right)\right) \leq n.$$

Por otra parte, para $k = 1, 2$

$$\|\left(R_{m,k}\right)_{h_m}\|_{L_p} \leq c_{12}\|f\|_p\|\mu\|^{1/p}e^{t\sqrt{n}}.$$

Luego, también del lema 2.2.1 deducimos que

$$\|r\|_{L_p} \leq 2c_{12}\|f\|_p\|\mu\|^{1/p}e^{t\sqrt{n}}.$$

Si $n > n_0$ *tenemos que*

$$\mathcal{R}_n(f)_p \leq 6\|f - f_{h_m}\|_{L_p} + \quad (2.43)$$

$$6c_{14}\|f\|_p \log\left(\frac{1}{h_m}\right) K(h_m, r, p) \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{t\sqrt{m}}{p}\right) + 6e^{-d\sqrt{n}},$$

donde

$$K(h, r, p) = \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left|\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2 x^2\right|^{rp}}\right)^{1/p}.$$

Sea $\sigma > 0$ *suficientemente pequeño* ($\sigma < 1 - \sqrt{2}/2$)*. Entonces*

$$\left|\left(1 - \frac{h_m}{2}\right)^2 - (1 - h_m)^2 x^2\right|^{-\delta} \leq v(\delta, x),$$

para todo m*, donde*

$$v(\delta,x)=\begin{cases}|1-x^2|^{-\delta} & si \quad x\in[-1,-\sigma-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2}+\sigma,1]\\ \\ M & si \qquad\qquad x\in\left(-\sigma-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\sigma\right)\end{cases},$$

siendo M *una cierta constante positiva.*

La condición $\mu\in M_{\delta,p}$*, implica que* $v(\delta,z)\in L_1(\mu)$*. Del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, deducimos que el* $\lim_n K(h_n,\delta,p)$ *existe y por tanto* $\sup_n K(h_n,\delta,p)=K(\delta,p)<\infty$*.*

Por otra parte, de (2.42) se tiene que para n *suficientemente grande, se cumple que* $m\geq n\,(b-a)/2=n\,\phi$*.*

Si $f\in\Lambda_\alpha^p(\mu)$*, de (2.43) tenemos para* $\pi\sqrt{\delta/p}>t/p$*, las siguientes desigualdades.*

$$\mathcal{R}_n(f)_p\leq M_{\delta,\phi}\left(e^{-\alpha t\sqrt{m}}+e^{-d\sqrt{n}}+\|f\|_p\sqrt{n}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{m\delta}{p}}+\frac{t\sqrt{m}}{p}\right)\right)$$

$$\leq M_{\delta,\phi}\left(e^{-\alpha t\sqrt{n\phi}}+e^{-d\sqrt{n}}+\|f\|_p\sqrt{n}\exp\left(-\sqrt{n\phi}\left(\pi\left(\frac{\delta}{p}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{t}{p}\right)\right)\right).$$

Si t *y* d *son tales que*

$$\sqrt{\phi}\left(\pi\sqrt{\frac{\delta}{p}}-\frac{t}{p}\right)=d=\alpha t\sqrt{\phi},$$

tendremos entonces que

$$\mathcal{R}_n(f)_p\leq M'(\delta,\phi_0)\max\{1,\|f\|_p\}\exp\left(-\alpha\pi\frac{\sqrt{np\delta\phi_0}}{\alpha p+1}\right),\tag{2.44}$$

donde ϕ_0 *depende de* n *y* $0<\phi_0<\phi$*. El parámetro* n *es suficientemente grande, y* $M'(\delta,\phi_0)$ *sólo depende de* δ *y* ϕ_0*, lo que demuestra el teorema 2.2.4.* ■

Corolario 2.2.2 *Sea* $1\leq p<\infty$*. Si la medida* μ *es tal que* $\mu\in M_{\delta,p}$ *para algún* $\delta>0$*, y es de Carleson, entonces*

$$\limsup_n\left(\sup_f\mathcal{R}_n(f)_p\right)^{1/\sqrt{n}}\leq\exp\left(-\frac{\alpha\pi}{\alpha p+1}\sqrt{\frac{p\delta(\mu)}{2}}\right),\tag{2.45}$$

donde el supremo se toma sobre las f *tales que* $f\in\Lambda_\alpha^p(\mu)$ *(definición 2.2.1), y* $\|f\|_p\leq c_{16}$*, para una cierta constante* $c_{16}>0$*, y*

$$\delta(\mu)=\sup\{\delta>0;\,\mu\in M_{\delta,p}\}.$$

Demostración *De (2.44) tenemos*

$$\limsup_n \left(\sup_{f \in \Lambda^p_\alpha(\mu), \|f\|_p \le c_{16}} \mathcal{R}_n(f)_p \right)^{1/\sqrt{n}} \le \exp\left(- \frac{\alpha\pi\sqrt{\phi p \delta}}{\alpha p + 1} \right), \tag{2.46}$$

cualquiera sea la constante ϕ, $0 < \phi < 1/2$, *y* δ *es tal que* $0 < \delta < \delta(\mu)$. *Por la continuidad del miembro derecho de (2.46) obtenemos (2.45).* ■

Corolario 2.2.3 *Sean* $1 \le p < \infty$ *y* $\delta(\mu)$ *como en el corolario 2.2.2. Si* μ *es de Carleson y* $\delta(\mu) = \infty$, *entonces*

$$\limsup_n \left(\sup_f \mathcal{R}_n(f)_p \right)^{1/\sqrt{n}} = 0,$$

donde el supremo se toma sobre las f *tales que* $f \in \Lambda^p_\alpha(\mu)$, *(definición 2.2.1) y* $\|f\|_p \le c_{16}$, *para una cierta constante* $c_{16} > 0$.

Demostración *El estimado (2.46) es cierto para todo* $\delta > 0$. *Basta pasar al límite cuando* δ *tiende a infinito.* ■

2.2.4. Aproximación de funciones de variación acotada

Denotemos por $BV[-1,1]$ a la clase de las funciones de variación acotada en el intervalo $[-1,1]$.

Tiene lugar la siguiente proposición.

Proposición 2.2.4 *Sea* $f \in H^1 \cap BV[-1,1]$. *Entonces*

1. $f \in \Lambda^1_1(dx)$, *y se cumple que*

$$\omega_1(f, dx, \delta) \le c_{17} V(f) \delta,$$

siendo $V(f)$ *la variación total de* f *en* $[-1,1]$.

2. *Si además* $f' \in L^1(dx)$, *entonces* $f \in \Lambda^1_1\left(|x|^{-1}dx\right)$.

Recíprocamente, si $f \in \Lambda^1_1\left(|x|^{-1}dx\right) \subset \Lambda^1_1(dx)$, *entonces* $f \in BV[-1,1]$.

Demostración *Para (1) y el recíproco usaremos una modificación de la prueba del lema 1 de [72].*[7] *Para demostrar (2) adaptaremos las condiciones del teorema al lema 9.2 de [68].*

Sea $f \in H^1 \cap BV[-1,1]$, *y sea* $V(x)$ *la variación total de* f *en* $[-1,x]$,

[7] Este lema 1 aparece en el capítulo 5, de [72], y es utilizado para demostrar una caracterización de las funciones $f \in H^p$ que satisfacen una condición de tipo Lipschitz en media de orden p.

$-1 < x \leq 1$.

Si h es pequeño, tenemos que

$$\int_0^1 |f(x) - f_h(x)|dx \leq \int_0^1 |V(x) - V_h(x)|dx =$$

$$\int_0^1 V(x)dx - \frac{1}{1-h}\int_0^{1-h} V(x)dx \leq \int_{1-h}^1 V(x)dx \leq V(f)h.$$

Por otra parte

$$\int_{-1}^0 |f(x) - f_h(x)|dx \leq \int_{-1}^0 (V_h(x) - V(x))\, dx =$$

$$\frac{1}{1-h}\int_{-1+h}^0 V(x)dx - \int_{-1}^0 V(x)dx \leq$$

$$\int_{-1}^{-1+h} V(x)dx + \frac{h}{1-h}\int_{-1}^0 V(x)dx \leq \frac{h(2-h)}{1-h}V(f) \leq 4hV(f).$$

Luego, para $0 < h < 1/2$ tenemos que

$$\int_{-1}^1 |f(x) - f_h(x)|dx \leq 5hV(f). \tag{2.47}$$

De (2.47) se demuestra la primera parte.

Supongamos ahora, adicionalmente, que $f' \in L^1(dx)$. Tenemos que

$$\int_{-1}^1 \frac{|f(x) - f((1-h)x)|}{|x|}dx \leq \int_{-1}^0 \frac{dx}{|x|}\int_x^{(1-h)x} |f'(t)|dt + \int_0^1 \frac{dx}{|x|}\int_{(1-h)x}^x |f'(t)|dt =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{|x|}\left[\int_{-x}^{-(1-h)x} |f'(t)|dt + \int_{(1-h)x}^x |f'(t)|dt\right] =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{|x|}\left[\int_{-1}^0 |f'(t)|\chi_{[-x,-(1-h)x]}(t)dt + \int_0^1 |f'(t)|\chi_{[(1-h)x,x]}(t)dt\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{|x|}\left[\int_{-1}^0 |f'(t)|\chi_{\left[-t,\frac{-t}{1-h}\right]}(x)dt + \int_0^1 |f'(t)|\chi_{\left[t,\frac{t}{1-h}\right]}(x)dt\right].$$

Es decir, se tiene que

$$\int_{-1}^1 \frac{|f(x) - f((1-h)x)|}{|x|}dx \leq \ln\left(\frac{1}{1-h}\right)\int_{-1}^1 |f'(t)|dt. \tag{2.48}$$

De (2.48) se tiene que $f \in \Lambda_1^1\left(|x|^{-1}dx\right)$.

Sea ahora $f \in \Lambda_1^1\left(|x|^{-1}dx\right)$. *Definamos*

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt,$$

y

$$f_n(x) = \frac{n}{x}\left[F(x) - F\left((1-1/n)\,x\right)\right],$$

para $x \neq 0$, *y* $f_n(0) = f(0)$.

Observemos que $f_n(x)$ *es derivable, y en todo* $x \in (-1,1)$ *se cumple que*

$$\lim_{n} f_n(x) = f(x).$$

Mediante cambios de variable convenientes, para $h > 0$ *se verifica que*

$$f_n(x) - \left(f_n\right)_h(x) = \frac{n}{x}\left[\int_{(1-1/n)x}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{(1-h)}\int_{(1-1/n)(1-h)x}^{(1-h)x} f(t)\,dt\right] =$$

$$n\left(\int_{(1-1/n)}^{1} \left(f(xu) - f_h(xu)\right)\,du\right).$$

Luego, de las siguientes desigualdades

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \left(f_n\right)_h(x)|\frac{dx}{|x|} \leq n\int_{1-1/n}^{1} dt \int_{-1}^{1} |f(x) - f_h(x)|\,\frac{dx}{|x|} \leq c_{18}h,$$

concluimos que

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \left(f_n\right)_h(x)|\frac{dx}{|x|} \leq c_{18}h,$$

siendo c_{18} *independiente de* n. *El lema de Fatou prueba que*

$$\int_{-1}^{1} |f_n'(x)|dx \leq \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \left(f_n\right)_h(x)|\frac{dx}{|x|} \leq c_{18}.$$

Sea $-1 = x_0 < x_1 < ... < x_m = 1$ *una partición finita y arbitraria del intervalo* $[-1,1]$. *Teniendo en cuenta que* $f_n(x)$ *es absolutamente continua, tenemos que*

$$\sum_{k=1}^{m} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leq \int_{-1}^{1} |f_n'(x)|dx \leq c_{18}. \tag{2.49}$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ en todo $x \in (-1,1)$, pasando al límite en (2.49) obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c_{18}. \tag{2.50}$$

De (2.50) se tiene que $f \in BV[-1,1]$.
La proposición 2.2.4 está demostrada. ■

El lema 9.2 de [68] es válido para cualquier función de variación acotada, y prueba que éstas cumplen una condición de tipo Lipschitz en media, mientras que la primera parte de la proposición 2.2.4 está dada sólo para la subclase de las que se prolongan a H^1. En [72] sólo interesa el cumplimiento de la condición de Lipschitz sobre la circunferencia unidad.

La clase de tipo Lipschitz definida en 2.2.1 y que se menciona en la proposición 2.2.4, difiere de [68] y [72] en el desplazamiento variable $\triangle x = hx$ utilizado en nuestra teoría.

En [68] puede verse que toda $f \in BV[-1,1]$ se aproxima en $L^1(dx)$ por medio de funciones de la clase de Sobolev $W_1^1[-1,1]$ definida por

$$W_1^1[-1,1] = \{f \in C[-1,1];\ f \text{ abs. cont.};\ f^{(1)} \in L^1[-1,1]\}.$$

Este resultado permite reducir la demostración a $f \in W_1^1$, y después extenderla a $f \in BV$. Un procedimiento análogo debe permitir caracterizar a la clase $\Lambda_1^1\left(|x|^{-1}dx\right)$.

Corolario 2.2.4

$$\limsup_{n} \left(\sup_{f} \mathcal{R}_n(f)_1\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}},$$

donde el supremo se toma para las $f \in H^1 \cap BV[-1,1]$ tales que $\|f\|_1 \leq 1$; y $V(f) \leq c_{19}$.

Demostración *Es consecuencia del corolario 2.2.2 y de la proposición 2.2.4 tomando α, p y δ_0 iguales a uno.* ■

2.3. Aplicaciones a la integración numérica

En esta sección se derivan de la teoría anterior algunos resultados teóricos y experimentales relativos a fórmulas de cuadratura numérica sobre el espacio H^p. La subsección 2.3.1 está dedicada fundamentalmente a la obtención de estimados superiores del error de cuadraturas cuyo diseño se deriva de la teoría de Newman-Gonchar. La subsección 2.3.2 introduce el concepto de cuadratura racional de interpolación, mientras que la 2.3.3 trata sobre algunos diseños adecuados para el cálculo numérico de integrales cuyos integrandos tienen singularidades características. El subepígrafe 2.3.6 tiene como principal objetivo utilizar a las cuadraturas racionales de interpolación en el cálculo numérico de ecuaciones integrales con singularidades débiles.

2.3.1. Estimados del error

Lema 2.3.1 *Sea μ una medida con $S_\mu \subset [-a,a]$, $0 < a < 1$. Sean $f \in H^1$ y $\rho_n = \rho_{n,h}$, $n \in \mathbb{N}$, $1-h=a$, la función racional asociada a f según (2.11), exceptuando al cero como punto de interpolación. Es decir*

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} \frac{g_(s) - g_n(z)}{g_n(s)(s-z)} f(s)ds,$$

donde Γ_h, $1-h=a$, es la circunferencia definida en (2.8).

Entonces las integrales

$$S_n(f) = \int_{-1}^{1} \rho_n(x)d\mu(x),\ n \in \mathbb{N},$$

constituyen una regla de integración numérica del tipo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,d\mu(x) \approx S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\, f(a_k), \tag{2.51}$$

donde los $\lambda_{n,k}, k = 1,...,n$, son coeficientes complejos, y los nodos a_k, $k = 1,...,n$, son números diferentes dos a dos, pertenecientes al intervalo $[-a,a]$.

Demostración *Sea $g_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$, la función racional de la demostración del teorema 2.2.1, donde P_n y Q_n son polinomios primos relativos y P_n es mónico.*

La fracción ρ_n podemos escribirla de la siguiente forma

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i Q_n(z)}\int_{\Gamma_h} \frac{M_n(z,s)}{P_n(s)} f(s)\,ds,$$

donde

$$M_n(z,s) = \frac{Q_n(z)P_n(s) - P_n(z)Q_n(s)}{s-z}.$$

De la propia definición de g_n, deducimos que $P_n(0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; los ceros de P_n son simples y están en el intervalo $[-a, a]$; los ceros de Q_n y P_n se corresponden uno a uno, a través de la simetría relativa a la circunferencia Γ_h.

Los teoremas de Fubini e Integral de Cauchy nos permiten obtener que

$$\int_{-1}^{1} \rho_n(x) d\mu(x) = \int_{-a}^{a} \rho_n(x) d\mu(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_h} \frac{f(s)}{P_n(s)} \left(\int_{-a}^{a} \frac{M_n(x,s)}{Q_n(x)} \, d\mu(x) \right) ds =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k m_n(a_k) \, f(a_k),$$

donde los números a_k, $k = 1, ..., n$; son los ceros de P_n; los coeficientes λ_k, $k = 1, ..., n$, provienen de la descomposición en suma de fracciones simples siguiente

$$\frac{1}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z - a_k},$$

y finalmente

$$m_n(z) = \int_{-a}^{a} \frac{M_n(x,z)}{Q_n(x)} d\mu(x).$$

El lema está demostrado. ■

Proposición 2.3.1 *Para $0 < a < 1$, sea M_a la clase de las medidas μ tales que su soporte S_μ cumple $S_\mu \subset [-a, a]$, y $\|\mu\| \leq 1$. Sea*

$$E_{n,p}(\mu) = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_{-a}^{a} f(x) \, d\mu(x) - S_n(f) \right|,$$

$1 \leq p \leq \infty$, el error de la fórmula de cuadratura (2.51), de orden n, asociada a una medida cualquiera $\mu \in M_a$, en el espacio H^p. Entonces

$$\sup_{\mu \in M_a} E_{n,p}(\mu) \leq c_{20} \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right) \exp\left(-\dfrac{c_0 \, n}{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right)} \right)}{(1-a)^{1/p}}. \tag{2.52}$$

Demostración *Sea $S_n(f)$, $f \in H^p$, el aproximante del lema 2.3.1. De la siguiente desigualdad*

$$\left| \int_{-a}^{a} f(x)\, d\mu(x) \; - \; S_n(f) \right| \leq \mu[-a,a]^{1/q} \left(\int_{-a}^{a} |f(x) - \rho_n(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, \tag{2.53}$$

y de (2.12,2.53) concluimos (2.52). El teorema queda demostrado. ■

Proposición 2.3.2 *Sea $\mu \in M_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, existe una regla de integración $S_{n,t}$, de orden n, tal que*

$$\left| \int_{-1}^{1} f \, d\mu \; - \; S_{n,t}(f) \right| = \mathcal{O}\left(\left\{ \omega_p(f,\mu,e^{-t}) \; + \; t \exp\left(-\frac{c_0 n}{t} + \frac{t}{p} \right) \right\} \right), \tag{2.54}$$

para cada $f \in H^p$.

Demostración *Es consecuencia de las desigualdades (2.13) y (2.53), tomando $S_{n,t}$ como*

$$S_{n,t}(f) = \int_{-1}^{1} \rho_n((1-h)x) d\mu(x), \tag{2.55}$$

donde $\log(1/h) = t$ *y ρ_n es como en el lema 2.3.1.* ■

Si $\lim_{\delta \to 0} \omega_p(f,\mu,\delta) = 0$, podemos elegir una sucesión (t_n), $t_n \geq 1$, $t_n \to \infty$, tal que

$$\lim_n \left| \int_{-1}^{1} f \, d\mu \; - \; S_{n,t_n}(f) \right| = 0.$$

Si $f \in \Lambda^p_\alpha(\mu)$ sea $t_n = \sqrt{n c_0 (\alpha + 1/p)^{-1}}$. De (2.54) deducimos entonces que

$$\left| \int_{-1}^{1} f \, d\mu \; - \; S_n(f) \right| \leq c_{21} \sqrt{n} \exp(-m(\alpha,p)\sqrt{n}), \tag{2.56}$$

donde $m(\alpha,p) = \sqrt{c_0/(\alpha+1/p)} \geq \sqrt{c_0/(\alpha+1)}$.

El orden del estimado (2.56), como función de n, es exacto para $d\mu = dx$ (ver [7]).

La fórmula exacta de los nodos utilizados en este subepígrafe 2.3.1, está calculada en la demostración del teorema 3.2.1, página 135.

2.3.2. Cuadratura racional sobre intervalos acotados

En esta parte presentamos un concepto de fórmula de cuadratura racional de interpolación que incluye a las fórmulas utilizadas en el subepígrafe anterior. La condición de exactitud va a estar asociada a la sucesiones (ω_n) de polinomios algebraicos, y de números naturales r_n, tales que $n-1 \leq r_n \leq 2n-1$.

Definición 2.3.1 *Decimos que la fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b f(x)\,d\mu(x) \;\approx\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(y_{n,k}), \tag{2.57}$$

es racional interpolatoria respecto a las sucesiones (r_n) *y* (ω_n)*, si para todo natural* n *existe un número* δ_n*,* $0 \leq \delta_n < (b-a)/2$*, tal que*

$$\int_{a+\delta_n}^{b-\delta_n} \frac{p}{\omega_n}\,d\mu \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \left(\frac{p}{\omega_n}\right)(y_{n,k}), \tag{2.58}$$

para todo polinomio p *cuyo grado es no mayor que* r_n*.*

La presencia de la sucesión de números positivos (δ_n) en la definición 2.3.1, se corresponde con la naturaleza intrínseca de las funciones que queremos integrar. Es decir, se trata de integrales impropias de funciones analíticas en todos los puntos del intervalo de integración, salvo quizás en los extremos.

La condición de interpolación referida al intervalo $[a+\delta_n, b-\delta_n]$ nos permite analizar el comportamiento del procedimiento en dos zonas altamente sensibles: cerca de los extremos y en el interior del intervalo.

El comportamiento del método cerca de los puntos a y b se explica en términos de un módulo integral de continuidad, mientras que la abundante analiticidad de algunas funciones f sobre intervalos de la forma $[c,d]$, $a < c < d < b$; nos debe permitir obtener teóricamente una velocidad de convergencia exponencial.

Notemos que la anterior definición conlleva la preselección de los polos del esquema racional, y que el método correspondiente a la función f se basa en el polinomio de Lagrange $p_n(f)$ de grado $n-1$ que interpola a la función $\omega_n(x)f(x)$ en los puntos $y_{n,k}$.

La fórmula (2.58) puede interpretarse como aquella de coeficientes

$$\lambda'_{n,k} = \lambda_{n,k}\omega_n(y_{n,k})^{-1},$$

de tipo interpolatoria polinomial respecto a medidas variantes

$$d\mu_n(x) = \omega_n(x)^{-1} d\mu(x).$$

Obviamente, el peso variante $W_n(x) = \omega_n(x)^{-1}$ puede tener un diseño no racional. La sección 4.1 está dedicada a la integración numérica con medidas variantes de tipo racional, trata el caso en que los ceros de los polinomios $\omega_n(x)$ se corresponden con los puntos de una tabla de interpolación con lo cual se vincula a esta teoría con los aproximantes multipuntuales de Padé.[8]

El procedimiento para el cálculo de los coeficientes $\lambda_{n,k}$ aparece explicado en el siguiente subepígrafe.

2.3.3. Diseños para el cálculo numérico

La construcción de fórmulas eficientes de cuadratura numérica para la integración de funciones con diversos tipos de singularidades, cobró mucha fuerza en los últimos años del siglo XX. Para abordar este tema comencemos considerando la integral

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{2.59}$$

Una singularidad para (2.59) es un punto x_0, llamado punto singular, que puede pertenecer a alguno de los siguientes tipos:

1. La integral (2.59) es impropia convergente, $x_0 \in \{a, b\}$, y además
   a) $\lim_{x \to x_0} f^{(j)}(x) = \infty$, para algún $j = 0, 1, ...,$
   b) f no admite prolongación analítica en x_0,
2. $x_0 \in (a, b)$, y en tal caso puede ser
   a) una singularidad débil por la presencia de un factor en f del tipo
   $$|x_0 - x|^{-\lambda},\ 0 < \lambda < 1,$$
   b) una singularidad fuerte por la presencia en f de alguno de los siguientes factores:
      1) $|x_0 - x|^{-\lambda}$, $1 \leq \lambda$,
      2) $(x_0 - x)^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$,

   c) $(x_0 - x)^{-1}$ y (2.59) está dada según el valor principal de Cauchy,
   d) $\log^\beta |x_0 - x|$, $\beta > 0$,
3. f es analítica en $[a, b]$ y meromorfa en el abierto U, $[a, b] \subset U$, siendo $x_0 \in \mathbb{C}$ un polo “significativamenteçercano a $[a, b]$,
4. f es una función oscilante.[9]

El caso 1 ha sido estudiado tradicionalmente mediante esquemas abiertos de cuadratura, especialmente con los conocidos métodos de Gauss. En [238]

[8] La definición de aproximante multipuntual de Padé puede verse en la página 57.
[9] Numerosos cambios de signo.

se utiliza un desarrollo del error para las cuadraturas de Gauss-Legendre, que permite obtener aceleración de la convergencia por medio de extrapolación.

Es simple convencernos de que el caso $2a$ se puede reducir al caso 1, o se utiliza directamente el conocido método de substracción de singularidades.

El caso $2b$ de las singularidades fuertes es tratado en [71], un artículo que puede ser interesante para el lector dedicado a problemas con derivadas fraccionadas o ecuaciones diferenciales fraccionadas. Las últimas se presentan en los problemas de difusión, y en otras áreas de la química, la física y la ingeniería. Una característica de [71] es el uso de la aproximación mediante splines.

Para el caso $2c$ han sido utilizadas cuadraturas basadas en el esquema gaussiano [69], y las llamadas cuadraturas modificadas, es decir, aquellas en las que se substrae la singularidad para aplicar luego algún esquema conocido [70, 139].

Las singularidades logarítmicas ($2d$) son reducidas al caso $2a$ que es más estable, escribiendo

$$f(x) = |x_0 - x|^{-\lambda} \left(|x_0 - x|^{\lambda} \log^{\beta} |x_0 - x|\right) g(x),$$

siendo g una función continua.[10]

Más adelante veremos que tanto desde el punto de vista teórico como experimental, el caso 3 debe desglosarse en subcasos $x_0 \in R_i$, correspondientes a subregiones $R_i \subset U$, $i = 1, ..., m$. Para las cuadraturas de Newman-Gonchar que hemos presentado en este capítulo, corresponde considerar las regiones

$$R_1 = \mathbb{C} \backslash D(a, b), \text{ y } R_2 = D(a, b) \backslash [a, b],$$

donde

$$D(a, b) = \{z;\ |z - (a + b)/2| \leq (b - a)/2\}.$$

Este tipo de singularidad se manifiesta en los resultados numéricos, y las expectativas de convergencia, que dependen de la distancia entre $[a, b]$ y x_0, pueden depender además de la posición relativa ocupada por el polo $z = x_0$ con respecto al intervalo.

En [114] se presenta para el caso 3 un esquema automático de cuadraturas para aproximar integrales de funciones que son analíticas en $[a, b]$, pero que tienen un polo sobre el eje real, o polos dobles conjugados, cerca de $[a, b]$. Este método se basa en reglas de integración producto de tipo interpolatorio, y sólo utiliza valores funcionales del intervalo $[a, b]$.[11] En la página 122 presentamos algunos resultados y comentarios acerca del caso 3 para cuadraturas racionales de Newman-Gonchar.

[10] Esto se denomina método de integración producto modificado.
[11] Ver [210] y las referencias que éste contiene

Los métodos de integración aproximada para funciones oscilantes (caso 4) han sido estudiados desde la primera mitad del siglo XX. Los problemas con integrandos oscilantes son frecuentes en la matemática y en las aplicaciones. Por ejemplo, éstos se presentan al calcular transformadas de Fourier, y al resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (problemas de contorno). También surgen al modelizar sistemas ópticos y de control automático, construcción de diagramas de dirección de antenas, solución de problemas de radioastronomía, cristalografía, procesamiento de señales, reconocimiento de imágenes, y en el procesamiento estadístico de datos experimentales. En [164] se construyen fórmulas óptimas en cierto sentido para aproximar integrales de integrandos fuerte y débilmente oscilantes.[12]

Las reglas de integración del lema 2.3.1, utilizadas en las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, tienen un interés fundamentalmente teórico: sus nodos producen matrices mal acondicionadas y sólo actúan en la mitad derecha del intervalo.[13] No obstante, el planteamiento de tipo interpolatorio (2.58) de estas fórmulas ofrece alternativas para el diseño de fórmulas capaces de producir resultados satisfactorios. Las siguientes líneas muestran cómo hacerlo de modo que puedan abordarse problemas vinculados a los casos $1a$, $1b$, $2a$, $2d$, y 3.

La teoría presente en este capítulo sugiere que la simetría entre los polos $p_{n,j,t}$ y cierta clase de nodos $x_{n,j,t}$, respecto a una circunferencia de radio s_t, debe producir convergencia.

Supongamos que n es par y adoptemos la definición

$$p_{n,j,t} = \frac{s_t^2}{x_{n,j,t}}, \tag{2.60}$$

con $x_{n,j,t} \neq 0$.

Consideremos en lo que sigue al intervalo $[-1, 1]$ para simplificar. De manera general nos interesan radios s_t tales que

$$0 < s_t < 1, \ \text{ y } \ -s_t < x_{n,j,t} < s_t,$$

para $j = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, y $t \geq 1$.

Si en particular fijamos

$$s_t = 1 - e^{-t}/2,$$

entonces de forma análoga a la seguida en el teorema 2.2.1, podemos probar que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, d\mu(x) - \int_{-1}^{1} \rho_{n,t}((1-e^{-t})x)\, d\mu(x) \right| = \mathcal{O}(r(n,t)), \tag{2.61}$$

[12] Ver también [64].
[13] Estos nodos aparecen calculados en la página 135.

donde

$$r(n,t) = \omega_1(f, \mu, e^{-t}) + t\, M_{n,t},$$

y

$$M_{n,t} = \sup \left\{ \left| \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - \dfrac{x_{n,j,t}}{s_t}}{x \dfrac{x_{n,j,t}}{s_t} - 1} \right) \right| ;\ |x| \leq \frac{2s_t - 1}{s_t} \right\}, \tag{2.62}$$

estando la fracción $\rho_{n,t}$ asociada a los nodos $x_{n,j,t}$, y polos $p_{n,j,t}$, de igual forma que en el teorema 2.2.1.

La siguiente condición[14]

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} (s_t - |x_{n,k,t}|) = \infty, \tag{2.63}$$

garantiza la convergencia a cero de $M_{n,t}$ cuando n tiende a infinito. Luego, si además t es suficientemente grande tenemos que el aproximante $S_{n,t}(f)$, definido en (2.55), es una buena aproximación de la integral de la función f.

Los nodos equidistantes

$$e_{n,j,t} = s_t \left(-1 + \frac{2j}{n+1} \right),\ j = 1, ..., n; \tag{2.64}$$

y los nodos de Chebyshev relativos a $[-s_t, s_t]$

$$c_{n,j,t} = -s_t \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2n} \right),\ j = 1, ..., n; \tag{2.65}$$

satisfacen (2.63), y son apenas sensibles a las variaciones del parámetro t.

Los nodos (2.65), y en general los ceros de polinomios ortogonales, configuran el tratamiento clásico de la integración numérica impropia sobre intervalos acotados y no acotados.

A diferencia de (2.65), la formulación (2.64) con $t \geq 1$ fijo, permite el diseño directo de esquemas anidados.

Mediante el cambio de variable $u = (1 - e^{-t})x$, la fórmula de integración (2.55) adopta la forma interpolatoria en el sentido dado por la definición 4.1.6 (página 176) considerando que está asociada a la sucesión de polinomios $\omega_n(x)$, definidos por

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - p_{n,j,t}),$$

[14] Ver por ejemplo [242], donde se establece la convergencia uniforme a cero del producto infinito sobre compactos dentro del disco unidad.

con exactitud $r_n \geq n-1$, $n \in \mathbb{N}$.

Los coeficientes $\lambda_{n,j} = \lambda_{n,j,t}$ podemos calcularlos como solución del sistema lineal de ecuaciones siguiente[(15]

$$\int_{-1+e^{-t}}^{1-e^{-t}} \frac{d\mu(x)}{x-p_{n,k,t}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n,j}}{x_{n,j,t}-p_{n,k,t}},\ k=1,...,n. \tag{2.66}$$

A las fórmulas obtenidas mediante el sistema lineal de ecuaciones (2.66) les llamaremos en lo que sigue cuadraturas de Newman-Gonchar, y específicamente X-racional y T-racional, cuando estén definidas para los nodos (2.64) y (2.65) respectivamente.

2.3.4. Convergencia sobre $C[-1,1]$

El objetivo de esta subsección, que incidentalmente hemos intercalado en esta sección, es hacer un análisis breve acerca de la convergencia de las fórmulas racionales de cuadratura sobre el espacio de las funciones continuas, para lo cual sólo conservaremos de la teoría estudiada en los párrafos anteriores, la condición de exactitud dada por el sistema (2.66).

Sea $Y = \{x_{n,k}\}$ una tabla Newtoniana de nodos en $(-1,1)$. Es decir, $x_{n',k} = x_{n,k}$, para todos los n y k tales que $n' > n \geq k$. Para simplificar escribamos $Y = \{x_n\}$. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de radios s_n, que satisfacen las dos siguientes condiciones

$$0 < s_n < 1, \tag{2.67}$$

$$-s_n^2 < x_k < s_n^2,\ k=1,...,n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.68}$$

Supongamos adicionalmente que los polos p_k, $k=1,...,n$, están definidos en función de s_n y de los puntos x_k, según (2.60). De lo anterior se deriva que $|p_k| > 1$, para todo $k=1,...,n$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $c_n \in (-1,1)$ definido por

$$p_n = \frac{c_n + c_n^{-1}}{2},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.69}$$

Entonces, de ([1], problema 7, página 254) se deduce que la condición[(16]

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|c_k|) = \infty, \tag{2.70}$$

[15]El método de cálculo dado en [128] para obtener numéricamente los coeficientes de la fórmula (2.55), tiene interés puramente teórico.

[16]La extensión de este resultado para el caso en que los p_k aparezcan repetidos, siendo conjugados aquellos que no son reales, aparece en [168].

es suficiente para que el sistema de funciones racionales

$$\left\{\frac{1}{x-p_k};\ k=1,...,n,\ n\in\mathbb{N}\right\}, \tag{2.71}$$

tenga envoltura lineal densa en $(C[-1,1],\|\cdot\|_\infty)$.

Sea S_n la fórmula de cuadratura definida por el sistema (2.66),[17] donde hemos sustituido a $h=e^{-t}$ por $\delta_n\to 0$. Si además $s_n=1-v_n$, $v_n<\delta_n$, $n\in\mathbb{N}$, entonces se tiene la siguiente estimación del error para f continua.

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(x)d\mu(x)-S_n(f)\right| &\le 2\omega(f,\delta_n)\\ &+\left|\int_{-1+\delta_n}^{1-\delta_n} f(x)d\mu_n(x)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n,k}f(x_k)\right|,\end{aligned} \tag{2.72}$$

donde μ_n es la medida imagen correspondiente al cambio de variables.

Para que tengamos

$$\lim_n S_n(f)=\int_{-1}^{1} f(x)d\mu(x),$$

para toda función continua f, es suficiente que se cumplan[18]

$$\sup_n\sum_{k=1}^{n}|\lambda_{n,k}|<\infty, \tag{2.73}$$

y la condición (2.70).

De lo anterior concluimos que, por causa de (2.70), los polos p_k no deben acercarse muy rápido en valor absoluto al valor uno. Por otra parte, la condición (2.73) es bastante exigente. La positividad de los coeficientes $\lambda_{n,k}$, y un grado de exactitud de la fórmula mayor que n, son suficientes para tener (2.73), pero son propiedades difíciles de tener en la práctica. En el capítulo 4 se investiga el caso de las cuadraturas racionales gaussianas, uno de los más importantes métodos de cuadratura positiva y grado máximo de exactitud.

2.3.5. Nodos equidistantes y de Chebyshev

En el caso de los nodos equidistantes $e_{n,j,t}$ dados en (2.64), la condición (2.68) se traduce en la desigualdad

$$t_n>\log\left(\frac{n+1}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

[17] Que de momento sólo produce cuadraturas de orden par. Más adelante veremos que la extensión a un orden n cualquiera es simple de establecer.

[18] La acotación uniforme (2.73) es también necesaria pues $(C[-1,1],\|\cdot\|_\infty)$ es un Banach.

Para los nodos de Chebyshev (2.65) no es difícil deducir que (2.68) se cumple si para n suficientemente grande se tiene que

$$t_n > 2 \log \left(\frac{2n}{\pi} \right).$$

Para ambos tipos de nodos, los equidistantes y los de Chebyshev (2.65), se satisface (2.68) para $n \leq 700$ y $t = 20$.

La fórmula abierta X-racional es una versión de la fórmula polinomial de Newton-Cotes. Las evidencias experimentales sugieren que la primera debe ser también divergente cuando ha sido aplicada a la llamada función de Runge[19] [207], definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

El modelo computacional que utiliza nodos poco sensibles respecto a variaciones del parámetro t, como es el caso de los equidistantes y los de Chebyshev, podemos simplificarlo si asumimos que t es suficientemente grande para que en (2.66) podamos sustituir e^{-t} por el cero. Las pruebas numéricas realizadas con el método racional asociado al sistema (2.66) con nodos (2.64) y (2.65), muestran que este método tiene una estabilidad numérica aceptable para $t \geq 10$. Sin embargo, una característica que está presente en los tres tipos de nodos que aquí estamos considerando, es decir, los nodos de Gonchar (3.4) (página 136), los nodos distribuidos uniformemente (2.64), y los de Chebyshev (2.65), es que las matrices correspondientes al sistema (2.66) están mal acondicionadas. La experiencia indica que la concentración de nodos en los extremos del intervalo de integración es uno de los factores que producen el mal acondicionamiento de la matriz asociada al sistema (2.66).[20] No obstante, los resultados numéricos con fórmulas simples de hasta 700 nodos son satisfactorios, tal como lo demuestran las tablas 2.3.2, 2.3.5 y 2.3.6. Los estimados de los números de condición, asociados a la norma euclideana, y para varios valores de n, están dados en la tabla 2.3.1.

Tabla 2.3.1 Números de condición asociados al sistema (2.66). La fila Cond(X) corresponde a los nodos (2.64) y Cond(T) a los nodos (2.65) ($t = 40$).

n	*10*	*100*	*400*	*700*
Cond(T)	*2.67e+05*	*1.04e+21*	*4.26e+21*	*1.32e+23*
Cond(X)	*7.88e+07*	*4.81e+19*	*5.65e+19*	*1.85e+20*

[19] La función de Runge no admite prolongación a H^1. Un trabajo relativamente reciente sobre la divergencia de las cuadraturas de Cotes para la función de Runge puede verse en [166].

[20] Monegato y Scuderi [170] opinan igual.

Ejemplo 2.3.1 *Sea $f(z) = \sqrt{z}$ la rama analítica y uniforme de la función raíz cuadrada compleja, definida por $f(1) = 1$. Consideremos a la integral siguiente.*

$$\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{2.74}$$

Con el objetivo de comparar la eficiencia del método racional interpolatorio definido anteriormente, con un método polinomial, hemos considerado a la conocida regla de los trapecios asociada al arreglo de nodos equidistantes (2.64), respecto al intervalo

$$[-1 + e^{-20}, 1 - e^{-20}].$$

Algunos de los resultados numéricos obtenidos se muestran en la primera columna de las tablas 2.3.2 y 2.3.6.[21]

Tabla 2.3.2 Errores al calcular (2.74), mediante el método de los trapecios y las cuadraturas racionales de interpolación, con $t = 20$.

n	*10*	*100*	*400*	*700*
T-racional	*0.453e-05*	*0.107e-07*	*0.841e-09*	*0.101e-08*
X-racional	*0.624e-03*	*0.103e-04*	*0.149e-05*	*0.666e-06*
Trapecios	*0.718e-02*	*0.207e-03*	*0.258e-04*	*0.111e-04*

Los resultados de la tabla 2.3.2 muestran una vez más la superioridad de los nodos de Chebyshev sobre las distribuciones uniformes.[22]

El planteamiento polinomial interpolatorio que se corresponde con el sistema (2.66) es el siguiente.

$$\int_{-1+e^{-t}}^{1-e^{-t}} x^k d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} x_{n,j,t}^k, \; k = 0, ..., n-1. \tag{2.75}$$

La matriz de este sistema (2.75) está también mal acondicionada, y la fórmula de cuadratura asociada sólo converge en casos muy especiales. Por ejemplo, si $1 - e^{-t} = 1$ y

$$d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

los nodos (2.65) aplicados al sistema (2.75) dan lugar a la conocida fórmula de Gauss, que converge para toda función continua. Si $d\mu(x) = dx$ entonces los nodos equidistantes (2.64) dan lugar a cuadraturas que divergen incluso para

[21] La fórmula de los trapecios se ha utilizado, como es usual, en su forma compuesta.
[22] Ver la sección 7 del capítulo 3 de [63].

algunas funciones analíticas.[23]

Teniendo en cuenta el papel que el parámetro t desempeña en el estimado (2.61), la precisión de los resultados debe mejorar cuando t aumenta el valor. Para $t > 40$ númericamente se tiene que $1 - e^{-t} = 1$, de modo que únicamente nos hemos interesado en realizar experimentos en el rango $t \in [10, 40]$. En la tabla 2.3.3 pueden apreciarse los diferentes comportamientos del error al variar el parámetro t.

Tabla 2.3.3 Errores al calcular la integral (2.74), producidos por la fórmula de cuadratura T-racional para diferentes valores de t.

n	*10*	*100*	*400*	*700*
$t = 10$	*0.187e-04*	*0.228e-04*	*0.228e-04*	*0.228e-04*
$t = 20$	*0.453e-05*	*0.107e-07*	*0.841e-09*	*0.101e-08*
$t = 30$	*0.453e-05*	*0.119e-07*	*0.186e-09*	*0.345e-10*
$t = 40$	*0.453e-05*	*0.118e-07*	*0.184e-09*	*0.405e-10*

Tabla 2.3.4 Errores al calcular la integral (2.74), producidos por la fórmula de cuadratura X-racional para diferentes valores de t.

n	*10*	*100*	*400*	*700*
$t = 10$	*0.600e-03*	*0.978e-05*	*0.215e-04*	*0.222e-04*
$t = 20$	*0.624e-03*	*0.121e-04*	*0.470e-05*	*0.292e-06*
$t = 30$	*0.624e-03*	*0.123e-04*	*0.144e-05*	*0.680e-06*
$t = 40$	*0.624e-03*	*0.147e-04*	*0.153e-05*	*0.656e-06*

Si queremos mantener la simetría al extender los sistemas de nodos (2.64) y (2.65) para el caso en que $n = 2m + 1$, tenemos que establecer la condición de interpolación en el punto $x = 0$, pero entonces no podemos asignarle un polo siguiendo el mismo criterio anterior. La solución la obtenemos considerando las mismas ecuaciones del sistema (2.66) para $k \neq m + 1$, y considerar la ecuación que a continuación se muestra para $k = m + 1$.

$$\int_{-1+e^{-t}}^{1-e^{-t}} d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}. \tag{2.76}$$

Las pruebas numéricas han mostrado que el comportamiento de estas fórmulas racionales de índice impar, calculadas en términos del sistema (2.66)-(2.76), es similar al de aquellas con n par. Por otra parte, la convergencia teórica de las cuadraturas de Newman-Gonchar cuando $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, está prevista

[23] En [20] pueden verse varios ejemplos.

en la demostración del teorema 2.2.1, en la cual la interpolación en el punto $x = 0$ sólo se justifica por la intención de producir un aproximante racional cuyos numerador y denominador son ambos polinomios de grado n. La tabla 2.3.5 contiene los errores cometidos al calcular la integral (2.74) para valores impares de n que permiten la comparación con los resultados de la tabla 2.3.2.

Tabla 2.3.5 Errores al calcular (2.74) mediante fórmulas de cuadratura racional de orden impar, asociadas al sistema (2.66)-(2.76) (t=20).

n	*11*	*101*	*401*	*701*
T-racional	*0.988e-05*	*0.105e-06*	*0.841e-09*	*0.997e-09*
X-racional	*0.488e-03*	*0.117e-04*	*0.153e-05*	*0.506e-06*

Ejemplo 2.3.2 *Consideremos a la función $f(z) = 1/\sqrt{z}$, donde hemos considerado a la rama analítica y uniforme de la función raíz cuadrada compleja, con $\sqrt{1} = 1$. Es posible comprobar que $f \in H^p(D(1/2, 1/2))$ para $0 < p < 4$.*

La siguiente integral es impropia de primera especie, con un punto singular en $x = 0$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{2.77}$$

Tabla 2.3.6 Errores al calcular la integral (2.77), mediante fórmulas de tipo polinomial con nodos (2.64), y racionales de interpolación ($t = 20$).

n	*10*	*100*	*400*	*700*
T-racional	*0.495e-01*	*0.497e-02*	*0.124e-02*	*0.711e-03*
X-racional	*0.168e-00*	*0.453e-01*	*0.226e-01*	*0.181e-01*
Trapecios	*0.141e+04*	*0.128e+03*	*0.318e+02*	*0.181e+02*

De la propia definición de los dos sistemas de ecuaciones, uno para las cuadraturas de orden par ($n = 2m$), y el otro para el orden impar ($n = 2m + 1$), se deduce que los coeficientes $\lambda_{n,j}$, $j = 1, ..., n$, de las cuadraturas T y X-racionales, satisfacen la siguiente relación.

$$\lambda_{n,1+j} = \lambda_{n,n-j};\ j = 0, ..., m - 1. \tag{2.78}$$

La tabla 2.3.7, mostrada a continuación, confirma aceptablemente la previsión teórica dada por (2.78), y al mismo tiempo revela el nivel de estabilidad numérica del procedimiento, afectado fundamentalmente por el mal acondicionamiento de la matriz de orden 20 asociada al sistema de ecuaciones.

Tabla 2.3.7 Coeficientes $\lambda_{20,j}$, $j = 1, ..., 20$, de la cuadratura T-racional de orden $n = 20$ $(t = 20)$.

j	$\lambda_{20,j}$	j	$\lambda_{20,j}$
1	*9.313431609077456e-03*	*20*	*9.313431608710010e-03*
2	*4.650330285386140e-02*	*19*	*4.650330286896501e-02*
3	*1.499000407648929e-02*	*18*	*1.499000384120784e-02*
4	*2.736194814144489e-01*	*17*	*2.736194835247435e-01*
5	*-5.518988011883386e-01*	*16*	*-5.518988135473160e-01*
6	*1.834891341995945e+00*	*15*	*1.834891392368192e+00*
7	*-3.241098424272097e+00*	*14*	*-3.241098573060275e+00*
8	*4.961280843656992e+00*	*13*	*4.961281171283090e+00*
9	*-4.420500368813523e+00*	*12*	*-4.420500917403023e+00*
10	*2.072898998609744e+00*	*11*	*2.072899706209109e+00*

Los siguientes ejemplos corresponden a integrandos con polos cercanos al intervalo de integración.[24]

Ejemplo 2.3.3 *Integrando analítico en* $[0, 1]$*, con un polo real próximo al intervalo de integración.*

$$\int_0^1 \frac{1}{x + e^{-8}}\, dx. \tag{2.79}$$

Tabla 2.3.8 Errores al calcular la integral (2.79), mediante fórmulas de tipo polinomial con nodos (2.64), y racionales de interpolación $(t = 20)$.

n	*10*	*100*	*400*	*700*
T-racional	*0.135e+01*	*0.171e-03*	*0.309e-05*	*0.307e-05*
X-racional	*0.362e+01*	*0.111e+01*	*0.290e+00*	*0.111e+00*
Trapecios	*0.160e+03*	*0.122e+02*	*0.210e+01*	*0.928e+00*

Ejemplo 2.3.4 *Integrando analítico en* $[0, 1]$*, con polos complejos próximos al intervalo de integración.*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 0{,}5}\, dx. \tag{2.80}$$

Tabla 2.3.9 Errores al calcular la integral (2.80), mediante fórmulas de tipo polinomial con nodos (2.64), y racionales de interpolación $(t = 20)$.

[24] En [210] se pueden encontrar referencias a artículos que tratan el problema de la integración numérica con singularidades cercanas al intervalo de integración.

n	*10*	*100*	*400*	*700*
T-*racional*	*0.518e-02*	*0.160e-03*	*0.291e-05*	*0.185e-04*
X-*racional*	*0.844e-01*	*0.753e-02*	*0.364e-02*	*0.185e-02*
Trapecios	*0.405e+00*	*0.401e-01*	*0.100e-01*	*0.572e-02*

El error producido al calcular la integral (2.79) del ejemplo 2.3.3, refleja la estabilidad de ambos métodos racionales, a pesar de la proximidad al intervalo $[0, 1]$ de un polo del integrando.

La tabla 2.3.9 expresa un comportamiento numérico inestable del método X-racional, ante la presencia de polos dentro del disco $D_{1/2}$, con centro en el punto $(1/2, 0)$, y radio $r = 1/2$. El integrando de (2.80) es una función que obviamente no admite prolongación analítica a $D_{1/2}$, de modo que no está previsto en la teoría la convergencia de las fórmulas T-racional y X-racional. Un experimento numérico realizado con ambas fórmulas racionales, utilizando fórmulas de orden $n = 10, 20, 30, ..., 700$, nos ha revelado el comportamiento oscilante del error al calcular la integral (2.80) mediante la fórmula X-racional, lo cual nos hace conjeturar que existen subsucesiones del mismo que no convergen a cero. A diferencia de lo que ocurre en el ejemplo 2.3.3, el integrando de (2.80) tiene polos relativamente alejados del intervalo de integración.

En la tabla 2.3.9 las fórmulas T-racional y de los trapecios sí parecen ser convergentes, pero la última necesita hasta 10 000 nodos para alcanzar un error igual a $0{,}400\mathrm{e} - 03$.

El uso de una fórmula de cuadratura X-racional compuesta, permite resolver el inconveniente producido en el ejemplo 2.3.4, debido aparentemente a la presencia de singularidades dentro del disco $D_{1/2}$, o polos en la frontera como es el caso que nos ocupa. Por ejemplo, si subdividimos a $[0, 1]$ en $m = 7$ subintervalos iguales en longitud, la aplicación de la fórmula T de orden $n = 100$, en cada uno de estos, no se afecta por causa de los polos $1/2 \pm i/2$, cuyas respectivas distancias al intervalo de integración son ambas exactamente iguales a $1/2$. De esta forma se realizan 700 evaluaciones funcionales en total para arrojar un error igual a $0{,}672\mathrm{e} - 08$, que es casi 300,000 veces más pequeño que el obtenido en la tabla 2.3.9 para $n = 700$.

2.3.6. Solución numérica de ecuaciones integrales singulares

En esta sección presentamos una pequeña muestra de los resultados obtenidos al aplicar el método de cuadratura racional interpolatoria a la solución del problema inverso (1.106), planteado en la subsección 1.3.

Para investigar las propiedades de la solución de la ecuación (1.106) (página 80), es recomendable considerar por separarado las malas propiedades que pueden ser trasmitidas a f por causa de las singularidades presentes en los datos. Si $K(x,y)$ y g son continuas a tramos, con discontinuidades de salto finito en líneas paralelas a los ejes coordenados, decimos que se trata de un problema con singularidades leves.[25] Si el núcleo resolvente del problema (1.106) es continuo, entonces la solución f debe heredar la forma y naturaleza de las singularidades del término g.[26] Nosotros no nos detendremos en considerar este caso, sino que asumiremos que g es analítica en (a,b), y que las singularidades están concentradas en el núcleo K.

Uno de los casos más tratados en la literatura por su importancia práctica es el de las singularidades débiles. Su planteamiento consiste en suponer que el núcleo de la ecuación (1.106) tiene la forma $K(x,y) = H(x,y)/|x-y|^{\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, siendo $H(x,y)$ continua en el intervalo producto $[a,b] \times [a,b]$.

Para resolver la ecuación singular (1.106) podemos utilizar en algunos casos el método modificado de cuadratura, que se basa en aceptar a priori que la solución f cumple una condición de Lipschitz de orden $\beta > \alpha$. Este método asume de antemano el conocimiento de la función[27]

$$A(x) = \int_a^b \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} dy,$$

de modo que sea factible la aplicación de alguna fórmula de cuadratura a la expresión siguiente

$$(1 + \lambda A(x))\, f(x) + \lambda \int_a^b \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} (f(y) - f(x)) dy = g(x).$$

Sea $D_n = \{a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una subdivisión uniforme del intervalo $[a,b]$. Es decir, $x_j = a + (b-a)(j-1)/(n-1)$, $j = 1, \ldots, n$. Nuestro problema consiste en calcular aproximadamante los valores $f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

La fórmula de Newman-Gonchar con nodos en D_n no tiene una forma natural de aplicarse a la solución de (1.106). Al igual que ocurre con otros métodos, la diagonal contituye un sitio prohibido para realizar evaluaciones. Una variante podría ser la consideración de fórmulas abiertas con nodos $\{x_2, \ldots, x_{i-1}\}$ y $\{x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ respectivamente, aplicadas en cada uno de los subintervalos que determina el punto singular x_i, cuando el índice i está en el rango $3 \leq i \leq n-3$. En el caso de que $i \in \{1, n\}$, se utilizan los nodos $\{x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. El siguiente

[25] Hemos traducido “leve”por la palabra inglesa “mild”.
[26] Ver la página 527 de [11].
[27] En el epígrafe 3.2.4 de [89] se muestra el método de solución de 1.106 utilizando cuadraturas de Gauss-Christoffel.

sistema de ecuaciones se corresponde con este último planteamiento.

$$f(x_i) + \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \lambda'_k K(x_i, x_k) f(x_k) = g(x_i), \quad i = 1, ..., n, \tag{2.81}$$

donde los coeficientes λ'_k son modificaciones adecuadas de los obtenidos en los sistemas (2.66) y (2.66)-(2.76).

Los inconvenientes que deben aparecer en el sistema (2.81) no son únicamente debidos a la simulación numérica del núcleo $K(x, y)$. Los nodos de la fórmula de cuadraturas, y solamente ellos, generan las incógnitas del sistema de ecuaciones. No hay espacio para una cuadratura racional abierta en los subintervalos $[a, x_2]$ y $[x_{n-1}, b]$, cuando x_2 y x_{n-1}, son respectivamente los puntos singulares en la fórmula (1.106). La escasa contribución de los nodos $x_1 = a$ y $x_n = b$ al sistema (2.81) produce serias perturbaciones en los resultados correspondientes a abscisas cercanas a los extremos del intervalo.

El método que hemos diseñado no es el único posible, pero sí es uno de los más simples que logra evadir el conflicto mencionado en el párrafo anterior. En cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, ..., n-1$, se aplica una fórmula de orden dos, preferiblemente T-racional con $t = 20$, de modo que si f es suficientemente suave se tiene la estimación

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{H(x_j, y)}{|x_j - y|^\alpha} f(y) dy \approx$$

$$h_n \left(\frac{\lambda_1 H(x_j, t_{k,1}) f(x_k)}{|x_j - t_{k,1}|^\alpha} + \frac{\lambda_2 H(x_j, t_{k,2}) f(x_{k+1})}{|x_j - t_{k,2}|^\alpha} \right), \tag{2.82}$$

donde $k = 1, ..., n-1$, los factores h_n están dados por

$$h_n = \frac{b-a}{2(n-1)},$$

y los puntos $t_{k,1}$ y $t_{k,2}$ están definidos por

$$t_{k,1} = h_n t_1 + (x_{k+1} + x_k)/2, \;\; t_{k,2} = h_n t_2 + (x_{k+1} + x_k)/2,$$

siendo t_i los nodos (2.65). Por otra parte, los escalares λ_i, $i = 1, 2$, son los coeficientes dados por el sistema (2.66) para $n = 2$.

Notemos que en la fórmula (2.82) se han reemplazado $f(t_1)$ y $f(t_2)$, por $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$ respectivamente. El error de truncamiento en (2.82) producido por esta última sustitución, puede estimarse superiormente por $\omega(f, \delta_n)$, tomando $\delta_n = h_n(1 - t_2)$.

Siguiendo la notación establecida en (2.82), sea A_n la matriz definida por

$$A_n(j,k) = \begin{cases} h_n\left(\lambda_2 \dfrac{H(x_j,t_{k-1,2})}{|x_j - t_{k-1,2}|^\alpha} + \lambda_1 \dfrac{H(x_j,t_{k,1})}{|x_j - t_{k,1}|^\alpha}\right) & 2 \le k \le n-1 \\ h_n\left(\lambda_1 \dfrac{H(x_j,t_{1,1})}{|x_j - t_{1,1}|^\alpha}\right) & k = 1 \\ h_n\left(\lambda_2 \dfrac{H(x_j,t_{n-1,2})}{|x_j - t_{n-1,2}|^\alpha}\right) & k = n \end{cases}$$

El arreglo $X = (\widetilde{f}(x_1), ..., \widetilde{f}(x_n))$ es la solución del sistema siguiente.

$$(\lambda\, A_n + I_n)\, X = B, \tag{2.83}$$

donde $B = (g(x_1), ..., g(x_n))$ e I_n es la matriz identidad de orden n.

La solución exacta de las ecuaciones integrales (2.84) y (2.85) que aparecen a continuación es para ambas la función $f(x) = x$. Las soluciones aproximadas han sido calculadas en 100 puntos equidistantes del intervalo $[0,1]$, mediante el sistema (2.83). Para simplificar la lectura, las tablas (2.3.10) y (2.3.11) sólo contienen respectivamente los resultados numéricos correspondientes a las abscisas $x = 0$, 0,25, 0,50, 0,75, 1, con $t = 20$.

Ejemplo 2.3.5 *Sea la siguiente ecuación integral*

$$\int_0^1 \frac{f(y)}{|x-y|^{1/2}}dy + f(x) = g(x), \tag{2.84}$$

donde $g(x) = (4/3)x^{3/2} + x + (2/3)(1-x)^{3/2} + 2x\sqrt{1-x}$.

Tabla 2.3.10 Solución aproximada de la ecuación (2.84).

j	x_j	$\widetilde{f}(x_j)$	*Error*
1	*0.0e-00*	*5.064e-03*	*5.06e-03*
25	*2.5-01*	*2.583e-01*	*1.59e-02*
50	*5.0e-01*	*5.241e-01*	*2.91e-02*
75	*7.5e-01*	*7.894e-01*	*4.20e-02*
100	*1.0e+00*	*1.034e+00*	*3.41e-02*

Ejemplo 2.3.6 *La ecuación*

$$f(x) - \int_0^1 \log|x-y|f(y)dy = g(x), \tag{2.85}$$

con $g(x) = x - 0{,}5(x^2 \log(x) + (1-x^2)\log(1-x) - (x+0{,}5))$*, tiene singularidades débiles ya que el núcleo* $K(x,y) = \log|x-y|$ *puede escribirse como*

$$K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^\alpha},$$

siendo $H(x,y) = |x-y|^\alpha \log|x-y|$, $0 < \alpha < 1$.

Tabla 2.3.11 Solución aproximada de la ecuación (2.85).

j	x_j	$\widetilde{f}(x_j)$	*Error*
1	*0.0+00*	*4.605e-03*	*4.60e-03*
25	*2.5e-01*	*2.547e-01*	*1.22e-02*
50	*5.0e-01*	*5.165e-01*	*2.16e-02*
75	*7.5e-01*	*7.762e-01*	*2.88e-02*
100	*1.0e+00*	*1.024e+00*	*2.41e-02*

Tabla 2.3.12 Errores máximos al resolver las ecuaciones (2.84) y (2.85), y número de condición de la matriz del sistema (2.83).

n	*Ec. (2.84)*	*Ec. (2.85) no mod.*	*Ec. (2.85) mod.*	*cond*$(A_n + I_n)$
10	*7.44e-02*	*2.5155e-02*	*3.08e-01*	*2.65e+00*
100	*5.07e-02*	*2.9888e-02*	*6.53e-02*	*3.20e+00*
200	*4.67e-02*	*3.0135e-02*	*4.75e-02*	*3.29e+00*
300	*4.52e-02*	*3.0216e-02*	*4.18e-02*	*3.33e+00*
400	*4.43e-02*	*3.0257e-02*	*3.90e-02*	*3.35e+00*
500	*4.37e-02*	*3.0281e-02*	*3.73e-02*	*3.37e+00*
600	*4.33e-02*	*3.0298e-02*	*3.62e-02*	*3.38e+00*
700	*4.29e-02*	*3.0309e-02*	*3.54e-02*	*3.39e+00*

En las tablas 2.3.11 y 2.3.12 (columna del método no modificado) se observa el comportamiento creciente del error al calcular los valores aproximados de la solución de la ecuación integral (2.85), cuyo núcleo presenta singularidades logarítmicas. En cambio, la columna del método modificado de la tabla 2.3.12 sí muestra un marcado comportamiento monótono decreciente, aunque con valores mayores que los del método sin modificar. Esto último es debido al error de truncamiento que adicionalmente introduce la propia modificación, tal como se muestra en la definición de la matriz A'_n.

En efecto, para atenuar la influencia adversa de la singularidad logarítmica hemos utilizado la siguiente matriz A'_n, para discretizar la ecuación (2.85) con la modificación que se indica en el ejemplo 2.3.6.

$$A'_n(j,k) = \begin{cases} H(x_j, x_k)\left(\dfrac{h_n\lambda_2}{|x_j - t_{k-1,2}|^{1/2}} + \dfrac{h_n\lambda_1}{|x_j - t_{k,1}|^{1/2}}\right) & 2 \leq k \leq n-1 \\[2ex] h_n\left(\lambda_1 \dfrac{H(x_j, x_k)}{|x_j - t_{1,1}|^{1/2}}\right) & k = 1 \\[2ex] h_n\left(\lambda_2 \dfrac{H(x_j, x_k)}{|x_j - t_{n-1,2}|^{1/2}}\right) & k = n \end{cases}$$

donde

$$H(x_j, x_k) = \begin{cases} |x_j - x_k|^{1/2} \log |x_j - x_k|, & j \neq k, \\[2ex] 0, & j = k. \end{cases}$$

Las aproximaciones en las tablas 2.3.10 y 2.3.11 son todas por exceso, lo cual se explica en parte por la forma en que se ha diseñado la fórmula (2.82). Sin embargo, se observa que el comportamiento del error puntual es uniforme para aproximantes cuyo orden oscila entre $n = 2$ y $n = 700$, a diferencia de los errores cometidos con el método tradicional de cuadratura modificado, si tenemos en cuenta los resultados numéricos que se reportan en [11].

El ejemplo 2.3.6 aparece resuelto en [11] por medio de los métodos de cuadratura modificado, y de integración producto. El primero de estos ya fue explicado al comienzo del subepígrafe. El segundo tiene dos versiones bien conocidas. La primera versión es efectiva cuando el núcleo $K(x,y)$ no tiene una especial complejidad en su formulación. En este caso se sugiere el uso de cuadraturas cuya forma se expresa a continuación.

$$\int_a^b K(x_j, y) f(y) dy \approx \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x_j) f(x_i). \tag{2.86}$$

Es decir, los coeficientes de la regla de integración dependen del núcleo y del punto singular que se considere. La fórmula (2.86) se exige que sea exacta para ciertos tipos de funciones, generalmente polinomios a tramos.

La otra versión del método de integración producto consiste en factorizar adecuadamente al núcleo $K(x,y)$, en el caso de que éste pueda producir una propagación del error no lineal al ser simulado mediante rutinas. La descomposición de K debe ser de la siguiente forma: $K(x,y) = L(x,y)M(x,y)$, siendo L una función que al menos es continua, $M(x,y) = 1/|x-y|^{\alpha}$, y α un número entre cero y uno, preferiblemente alejado de los valores extremos. Ahora corresponde aplicar la primera versión de la integración producto al núcleo M para obtener el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\widetilde{f}(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x_i) L(x_i, x_j) \widetilde{f}(x_j) = g(x_j). \tag{2.87}$$

El sistema (2.87) con $L \equiv 1$ se corresponde con el planteamiento de la primera versión que hemos dado de la integración producto.

El método modificado con matriz A'_n, que hemos aplicado a la singularidad logarítmica de la ecuación 2.85, se corresponde con la segunda versión del método de integración producto.

En la tabla 5.2, página 537 de [11], se muestran los errores cometidos al calcular aproximadamente la solución $f(x) = x$ de la ecuación integral (2.85), mediante el método de cuadraturas modificado, considerando los pasos $h = 1/n$, $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$, y cuadraturas compuestas de Simpson de orden $m = n/2$. Para cuadraturas de orden $n = 64$, se observa en [11] que los errores en la región central del intervalo $[0, 1]$ alcanzan el sorprendente tamaño de 10^{-11}, mientras que cerca de los extremos del intervalo los errores están entre 10^{-4} y 10^{-5}.

Los resultados obtenidos al aplicar la segunda versión del método de cuadratura modificado a la ecuación (2.85) pueden verse en la tabla 5.3, página 548 de [11]. En este caso no se observan marcadas diferencias en el comportamiento del error cuando se consideran por separado las zonas intermedia y extremas del intervalo de integración. El error máximo varía entre $7{,}2 \times 10^{-2}$ para $n = 40$, y $1{,}6 \times 10^{-1}$ para $n = 10$, lo cual significa que, en este ejemplo y en términos de precisión, este método es ligeramente peor que nuestro método racional cuya aplicación a la misma ecuación produce los errores $2{,}91 \times 10^{-2}$ y $2{,}52 \times 10^{-2}$, para los órdenes $n = 40$ y $n = 10$, respectivamente.

El error máximo que se comete al calcular la solución de la ecuación (2.84) mediante el sistema (2.81) con 21 nodos ($n = 21$), es 2.38. Sin embargo, si compensamos las ecuaciones correspondientes a las singularidades x_2 y x_{n-1} mediante cuadraturas T-racionales de orden 2 aplicadas a los subintervalos $[a, x_2]$ y $[x_{n-1}, b]$ (fórmula (2.82)), el error máximo se reduce a 0.43.

Los resultados numéricos mostrados en las subsecciones 2.3.3 y 2.3.6 han sido obtenidos mediante rutinas hechas en MatLab, y procesadas en un PC Pentium MMX. Las cifras que aparecen en las tablas 2.3.5-2.3.12, han sido acortadas atendiendo a razones tipográficas. Hemos hecho lo posible para no mutilar la información que puede ser útil para el lector.

Capítulo 3

Aproximación racional a tramos con nodos libres

Los métodos polinomiales, aquellos cuyo diseño está basado en esquemas de aproximación a tramos, son muy utilizados en las aplicaciones a la física y la ingeniería. Un ejemplo notable está dado por el método de los elementos finitos, un procedimiento numérico diseñado con el propósito de discretizar y resolver eficientemente problemas de contorno regulares. En este capítulo consideramos esquemas racionales a tramos para aproximar ciertas clases de funciones definidas en intervalos del eje real, con singularidades interiores, y cuya afininidad con las funciones racionales es mayor que con los polinomios. Es decir, funciones que deben cumplir la propiedad de Newman. Específicamente estudiamos, utilizando el esquema técnico del capítulo 2, la aproximación racional a tramos de dos clases de funciones: $H_{\nu,\epsilon}I$ y $H_{\nu}^{p}I$, ambas con la característica común de que sus miembros admiten prolongación analítica a un espacio de Hardy en subintervalos. La clase $H_{\nu,\epsilon}I$ está formada por funciones analíticas a tramos, consideradas primero por Szüsz y Turán, y más recientemente por Levin, Maimeskul y Saff. La otra clase que investigamos: $H_{\nu}^{p}I$, está compuesta por funciones con singularidades características interiores, en el sentido de las teorías de Gonchar y Szabados. Para construir los aproximantes racionales a tramos hemos utilizando ciertos sistemas recurrentes de ecuaciones lineales, con los cuales se garantiza la continuidad de estos aproximantes. Entre otros resultados, en esta parte llegamos a la conclusión de que, en la tarea de aproximar funciones de las clases mencionadas, los aproximantes racionales a tramos deben ser en general más eficientes que los tradicionales de una única pieza.

En este capítulo estudiamos la atracción que ejercen las singularidades sobre los nodos, e incluimos una versión discreta con fines experimentales.

3.1. Preliminares

El conjunto $\{x_k\}_{k=1}^{k=\nu}$, tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_\nu < x_{\nu+1} = b, \quad \nu \in \mathbb{N}$, representará en este capítulo una ν-subdivisión del intervalo I con extremos en los puntos a y b, $a < b$. Mediante I_k, $k = 1, ..., \nu$, denotaremos al k-ésimo subintervalo correspondiente a esta subdivisión.

Sigamos ahora la línea trazada por el teorema B de Szabados. Para ello definamos dos subclases de $D(1/\delta, \nu, I)$, que están vinculadas con la obtención de los resultados en este capítulo.[1]

Sea D el disco unidad y sea f una función continua en I tal que para alguna ν-subdivisión $\{x_1, ..., x_\nu\}$, cada restricción $f_k(x) = f(x),\ x_{k-1} < x < x_k$, tiene prolongación analítica al espacio de Hardy $H^p(d_k(D))$, donde d_k es la función definida por

$$d_k(x) = x\ \ l_k + c_k, \quad c_k = (x_{k-1} + x_k)/2, \quad l_k = (x_k - x_{k-1})/2;$$

$k = 1, .., \nu + 1;\ 1 \leq p \leq \infty$.

Esta clase la denotamos por $H_\nu^p I$. En particular, las clases $H_0^\infty[-1, 1]$ y $H_0^p(-1, 1) = H^p$, son especialmente consideradas en [97] y [124, 122] respectivamente (ver el capítulo 2).

Para $\epsilon > 0$ sea $H_{\nu,\epsilon} I$ la subclase de $H_\nu^p I$ de las funciones f, para las cuales f_k tiene prolongación analítica a $H^\infty(d_{k,\epsilon}(D))$, siendo $d_{k,\epsilon}(x) = (l_k + \epsilon)x + c_k$, $k = 1, ..., \nu + 1$.

Notemos que las singularidades de cada $f \in H_\nu^p I$ tienen la misma característica de estar todas situadas en la frontera de algún disco donde f es analítica (ver [172, 97, 124]).

Es conocido que el orden de aproximación racional para la clase $H_{0,\epsilon} I$ es $\mathcal{O}(e^{-d_1 n})$, con $d_1 > 0$ (ver [97, 243]).

En [97] y [223] han sido obtenidos estimados del error óptimo $\mathcal{R}_n(f, [-1, 1])_\infty$, para algunas funciones $f \in H_1^p[-1, 1]$.

Las definiciones y notaciones anteriores relativas a las clases de funciones que

[1] La definición de $D(1/\delta, \nu, I)$ y el enunciado del teorema B de Szabados pueden ser vistos en la página 47.

son analíticas salvo en un número finito de puntos, se conservarán a través de todo este capítulo.

Para funciones analíticas a tramos sobre un intervalo I, se demuestra en [229] que[2]

$$\mathcal{R}_n(f, I)_\infty \leq Ce^{-c\sqrt{n}},\ (C > 0, c > 0).$$

Un enfoque adecuado para resolver el problema de aproximar funciones con propiedades del tipo ST es aquel que utiliza esquemas de aproximación a tramos. Si además el problema no ofrece de antemano información acerca de la localización de los puntos x_k que definen la subdivisión del intervalo, ello nos conduce directamente a la consideración de aproximantes con nodos libres, lo que otorga un carácter fuertemente no lineal al método.

No es difícil comprobar la siguiente

Proposición 3.1.1

$$H_{\nu,\epsilon}I \subset H_\nu^p I \subset D(1/\delta, \nu, I).$$

Por otra parte, es obvio que los elementos de $H_{\nu,\epsilon}I$ son analíticos a tramos en I. Recíprocamente, toda función analítica a tramos sobre $[-1, 1]$ pertenece a algún $H_{\nu,\epsilon}I$. Para probar la última afirmación posiblemente tengamos que aumentar los puntos de la subdivisión inicial.

Tiene lugar la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2 *Si f es una función analítica a tramos sobre el intervalo $I = [a, b]$, entonces existe un número natural $\nu \geq 1$ y $\epsilon > 0$, tales que $f \in H_{\nu,\epsilon}I$.*

Demostración *Consideremos primero un intervalo cerrado $J = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, y un abierto bidimensional $U \neq \mathbb{C}$ con $J \subset U$. Sean ρ y n dados por*

$$\rho = d(J, \mathbb{C}\backslash U) > 0,\ \ n = [(\beta - \alpha)/\rho] + 1.$$

Entonces los discos D_k, de centro

$$c_{n,k} = \alpha + (2k + 1)(\beta - \alpha)/(2n),\ \ \ k = 1, ..., n - 1,$$

y radio

$$r_n = (\beta - \alpha)/n + \rho/2 < \rho,$$

cubren a J, están contenidos en U, y

$$x_{n,k} = \alpha + k(\beta - \alpha)/n \in D_{k-1} \cap D_k,$$

donde $k = 2, ..., n - 1$, $\alpha \in D_1$, $\beta \in D_{n-1}$.

Para esta función existe una partición

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = b$$

[2] La definición de función analítica a tramos puede verse en la página 45.

del intervalo I tal que la restricción de f a cada subintervalo $I_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., m+1$, admite prolongación analítica a un abierto[3] *U_k, $I_k \subset U_k$, pero f no es analítica en los puntos t_k, $k = 1, ..., m$.*

Sea $\rho = \min_k d(I_k, \mathbb{C}\backslash U_k) > 0$. A cada subintervalo I_k, $k = 1, ..., m+1$, aplicamos el mismo procedimiento que anteriormente se utilizó en el intervalo J, y obtenemos una partición de I_k, de la forma

$$x_{k,i} = t_{k-1} + i(t_k - t_{k-1})/n, \quad i = 2, ..., n-1, \quad k = 1, ..., m+1,$$

para cierto $n \in \mathbb{N}$ que no depende de k.

Concluimos que $f \in H_{\nu,\epsilon}$, para $\nu = (n-1)(m+1) - 1$ y $\epsilon = \rho/2$. ■

Unos minutos de reflexión son suficientes para que en lector encuentre otras formas de demostrar la proposición 3.1.2, para las cuales el valor de ν sea menor. Sólo señalaremos que en tales casos el valor de n que encontremos para cada I_k sí dependerá de k.

En las líneas anteriores hemos comprobado que, por un lado, nuestro método racional a tramos se aplica a un subconjunto de la clase de funciones considerada por Szabados en [223], mientras que, por otra parte, la clase de funciones estudiada por Szüsz y Turán en [229] está íntegramente incluida en nuestros resultados.

La clase de aproximantes que será usada en este capítulo, y que denotaremos por $S_{n,\nu}[a,b]$, $\nu \geq 0$, está formada por funciones racionales a tramos. Formalmente tenemos que[4]

Definición 3.1.1 *La clase de funciones aproximantes $S_{n,\nu}[a,b]$ la definimos de la siguiente forma.*

Si $\nu = 0$ ponemos $S_{n,0}[a,b] = F_{n,n}$. Si $\nu \geq 1$, entonces $f_{n,\nu} \in S_{n,\nu}[a,b]$, cuando $f_{n,\nu}$ es continua en $[a,b]$, y existen puntos $\tau_1, ..., \tau_m$; $1 \leq m \leq \nu$, tales que

$$a = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_m < \tau_{m+1} = b,$$

y $m+1$ funciones racionales $r_k \in F_{n,n}$, tales que para $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $f_{n,\nu}(x) = r_k(x)$, donde $\{x;\ r_k(x) = \infty\} \subset \mathbb{C}\backslash[\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, ..., m+1$.

Definición 3.1.2 *Sea $W \in L^\infty(dx, [a,b])$, $W \geq 0$, y sea $\|\ \|_p$ la norma de $L^p(W) = L^p(W\,dx, [a,b])$, $1 \leq p \leq \infty$. La mejor aproximación de la función f mediante elementos de $S_{n,\nu}[a,b]$ está dada por*

$$R_{n,\nu}(f)_p = \inf\Big\{\|f - f_{n,\nu}\|_p \,;\, f_{n,\nu} \in S_{n,\nu}[a,b]\Big\},\ 1 \leq p \leq \infty.$$

[3] Que suponemos diferente de $\mathbb{C}$ sin perder generalidad. Si $U = \mathbb{C}$ tomamos cualquier disco con centro en $(\alpha+\beta)/2$, y no es necesario el procedimiento descrito.

[4] La definición de $F_{n,m}$ está dada en la página 87.

Este capítulo tiene como objetivo el estudio de la aproximación racional a tramos de funciones continuas, analíticas a tramos y del tipo H^p a tramos, y está organizado de la siguiente forma.

Algunos detalles de la técnica de Newman- Gonchar son usados en la sección 3.2, para construir una función racional a tramos próxima a una $f \in H^p_\nu I$ dada. La demostración de los teoremas 3.2.1,3.2.2 y 3.2.3 se basa fundamentalmente en cierto sistema lineal de ecuaciones algebraicas, no homogéneo, que consta de dos partes. Una expresa de forma recurrente la continuidad del aproximante, mientras que la segunda constituye una condición de interpolación en los nodos de Gonchar [97] para cada subintervalo de la subdivisión. Esta sección también contiene un corolario del teorema 3.2.1.

La sección 3.3 está dedicada al estudio del modelo discreto. El propósito principal de esta sección es el estudio del comportamiento del error uniforme respecto a funciones continuas, sobre conjuntos discretos $Y \subset X = [-1, 1]$. Los aproximantes utilizados son una versión discreta de la dada en la sección 3.2 para el caso continuo. La principal conclusión a la cual se llega es que las discrepancias fuera del conjunto discreto Y están bajo control cuando la densidad de Y tiende a cero.

Los resultados de la sección 3.3.2 son básicamente consecuencia de los anteriores epígrafes 3.3 y 3.2. Se trata en esta parte de probar la existencia de sucesiones óptimas de aproximantes racionales a tramos, en su versión discreta, que convergen uniformemente a funciones analíticas y H^∞ a tramos sobre todo el intervalo $[-1, 1]$. El orden de convergencia se prueba que es el del caso continuo estudiado en la sección 3.2.

La localización de singularidades es uno de los principales objetivos del artículo [112]. En este sentido la sección 3.3.3 trata brevemente el tema del comportamiento asintótico de los nodos óptimos. Se prueba bajo condiciones muy generales que las singularidades atraen a los nodos óptimos relativos a aproximantes discretos. Esta teoría fundamenta el uso del método racional a tramos en la solución de problemas de identificación con singularidades aisladas.

La sección 3.4 es la última de este capítulo, y en ella se muestran algunos resultados numéricos relativos a la aproximación discreta de funciones con singularidades, la localización de singularidades, y la solución del problema de identificación (1.103) de la página 77.

3.2. Estimados del orden de convergencia en L^p.

El objetivo principal de esta sección es estudiar el comportamiento asintótico de $R_{n,\nu}(f)_p$, para $f \in H$, donde H es una de las siguientes clases: $H_{\nu,\epsilon}I$ y $H_\nu^p I$.

Teorema 3.2.1 *Sea $f \in H_\nu^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$R_{n,\nu}(f)_p = \mathcal{O}\left(\inf_{t\geq 1}\left\{\omega(f, e^{-t}, [a,b]) + t\,\exp\left(-\frac{nc}{t} + \frac{t}{p}\right)\right\}\right), \tag{3.1}$$

donde c es una constante positiva absoluta, y $\omega(f,\delta,[a,b])$ es el módulo uniforme de continuidad de f.

Demostración *Para simplificar la notación, en lo que sigue*

$$M(f,n,p,t,I) = \omega(f, e^{-t}, I) + t\,\exp\left(-\frac{nc}{t} + \frac{t}{p}\right),$$

donde $c > 0$ es la constante dada por (1.67) (página 49).

Del teorema 2.2.1 (ver [124]) podemos asegurar que existe una función racional $\Lambda_{n,t,k} \in F_{n-1,n}$, tal que

$$\left(\int_{-1}^{1} |f\circ d_k(x) - \Lambda_{n,t,k}((1-e^{-t})x)|^p\, W\circ d_k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq M_0\left(\omega_{p,k}(f, e^{-t}) + t\,\exp\left(-\frac{nc}{t} + \frac{t}{p}\right)\right), \tag{3.2}$$

donde $t \geq 1$, $M_0 > 0$ sólo depende de $\|f\circ d_k\|_{H^p}$. Además, $\omega_{p,k}(f,\delta)$ satisface (Ver la definición 3.2.1.)

$$\omega_{p,k}(f,\delta) \leq \|W\|_\infty^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}}([l_k]+1)\omega(f,\delta,[x_{k-1},x_k]). \tag{3.3}$$

*La formulación dada en (3.24) para $\omega_{p,k}(f,\delta)$, corresponde a $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$, la norma integral es sustituida por $\|g\|_\infty =$***ess sup** $|g(x)\,W(x)|$.

Mediante cálculo directo podemos deducir de la demostración del teorema 2.2.1 que $\Lambda_{n,t,k}$ tiene n polos $p_{n,j,t}$

$$\left(1 - \frac{e^{-t}}{2}\right) < p_{n,j,t} = \left(1 - \frac{e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{M(n,j,t)+1}{M(n,j,t)-1}\right),$$

y

$$f\circ d_k(x_{n,j,t}) = \Lambda_{n,t,k}(x_{n,j,t}),$$

donde

$$0 < x_{n,j,t} = \left(1 - \frac{e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{M(n,j,t)-1}{M(n,j,t)+1}\right) < \left(1 - \frac{e^{-t}}{2}\right), \tag{3.4}$$

y

$$M(n,j,t) = (4-3e^{-t})\exp\left(t\left(1-\frac{j}{n}\right)\right),\ j=1,..n,\ t\geq 1.$$

Sea $g_{n,t}$ definida por

$$g_{n,t}(z) = \Gamma_{n,t}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-x_{n,j,t}}{z-p_{n,j,t}}\right),$$

donde

$$\Gamma_{n,t} = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1+M(n,j,t)}{1-M(n,j,t)}\right).$$

La siguiente propiedad, que permite obtener (3.2), es satisfecha por $g_{n,t}$ (ver [97, 124]).

$$|g_{n,t}(x)| \leq M_1\left(\exp\left(-\frac{n\,c}{t}\right)\right)\quad (|x|\leq 1-e^{-t}).$$

Ahora definamos la siguiente función racional

$$\rho_{n,t,k}(x) = \Lambda_{n,t,k}\left((1-e^{-t})d_k^{-1}(x)\right),$$

donde $x\in[x_{k-1},x_k],\ k=1,..,\nu+1$. Tenemos que $\rho_{n,t,k}\in F_{n-1,n}$, con polos en

$$p_{n,j,t,k} = d_k\left(\frac{p_{n,j,t}}{(1-e^{-t})}\right), \tag{3.5}$$

y que satisface $\rho_{n,t,k}(x_{n,j,t,k}) = f(x_{n,j,t,k})$, donde

$$x_{n,j,t,k} = d_k\left(\frac{x_{n,j,t}}{(1-e^{-t})}\right),\ j=1,..,n. \tag{3.6}$$

La siguiente cota superior la deducimos de (3.2) y (3.3).

$$\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-\rho_{n,t,k}(x)|^pW(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{O}(M(f,n,p,t,[x_{k-1},x_k])). \tag{3.7}$$

A continuación mostramos un sistema lineal de ecuaciones que permite construir un aproximante continuo $f_{n,\nu}$ a la función f.

$$\frac{a_{n,k}x_k^n+...+a_{0,k}}{q_{t,k}(x_k)} = \frac{a_{n,k+1}x_k^n+...+a_{0,k+1}}{q_{t,k+1}(x_k)};\quad k=1,..,\nu; \tag{3.8}$$

$$a_{n,k}x_{n,j,t,k}^n+...+a_{0,k} = q_{t,k}(x_{n,j,t,k})f(x_{n,j,t,k});\quad j=1,..,n;\ k=1,..,\nu+1; \tag{3.9}$$

donde

$$q_{t,k}(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-p_{n,j,t,k}),\ t\geq 1.$$

El sistema (3.8-3.9), que es lineal con respecto a las incógnitas $a_{j,k}$, tiene matriz de sistema con rango $(\nu+1)(n+1)-1$, y número de condición basado en la norma $\|\cdot\|_\infty$ para matrices, $c_{n,\nu,t} \geq M_2\, e^{\beta t}$, $M_2 = M_2(n,\nu,a,x_1,...,x_\nu,b) > 0$, $\beta = \beta(n,\nu) > 0$.[5] *Fijando $a_{n,1} = \Gamma_{n,t}$ obtenemos una solución $\{a_{j,k}\}$, cuya correspondiente $f_{n,\nu,t} \in S_{n,\nu}[a,b]$, tiene $\nu+1$ piezas $r_{n,t,k} \in F_{n,n}$. Es decir*

$$f_{n,\nu,t}(x) = r_{n,t,k}(x) = \frac{a_{n,k}x^n + ... + a_{0,k}}{q_{t,k}(x)}, \;\; x \in [x_{k-1}, x_k],\; k = 1,..,\nu+1.$$

Para $z = (1-e^{-t})\, d_k^{-1}(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$ las ecuaciones (3.9) implican que

$$r_{n,t,k}(x) - \rho_{n,t,k}(x) = a_{n,k} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z - x_{n,j,t}}{z - p_{n,j,t}} \right). \tag{3.10}$$

Por otra parte, para $k = 1,..,\nu$; $t \geq 1$, las igualdades dadas más abajo pueden ser obtenidas de (3.8) y (3.10) (ver [124]).

$$f \circ d_k(1-e^{-t}) - g_{n,t}(1-e^{-t}) I_{n,t,k}(1-e^{-t}) + a_{n,k} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-t}-x_{n,j,t}}{1-e^{-t}-p_{n,j,t}} \right) =$$

$$f \circ d_{k+1}(-(1-e^{-t})) - g_{n,t}(-(1-e^{-t})) I_{n,t,k+1}(-(1-e^{-t})) +$$

$$a_{n,k+1} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-t}+x_{n,j,t}}{1-e^{-t}+p_{n,j,t}} \right),\; k = 1,..,\nu+1;\; t \geq 1, \tag{3.11}$$

donde

$$I_{n,t,k}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_t} \frac{f \circ d_k(s)}{g_{n,t}(s)(s-x)} ds,$$

con

$$K_t = \left\{ s, |s| = (1 - \frac{e^{-t}}{2}) \right\}.$$

La siguiente desigualdad (ver [72]) produce el término $e^{t/p}$ en (3.2) y (3.13).

$$|I_{n,t,k}(x)| \leq 2^{\frac{1}{p}+1} \|f \circ d_k\|_{H^p} e^{\frac{t}{p}},\; k = 1,..,\nu+1,\; |x| \leq 1 - e^{-t}. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) obtenemos

$$\left| a_{n,k} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-t}+x_{n,j,t}}{1-e^{-t}+p_{n,j,t}} \right) \right| \leq M_3\, M(f,n,p,t,[a,b]), \tag{3.13}$$

[5] Por ejemplo $\beta(2,2) = 0{,}5$, $M_2(2,2,0,0{,}01,1,2) \approx 10^3$.

donde $k = 1, .., \nu + 1$; $t \geq 1$, *y* $M_3 > 0$ *no depende de* n *y* t.

Notemos que la relación

$$x_{n,j,t}\, p_{n,j,t} = \left(1 - \frac{e^{-t}}{2}\right)^2,$$

$j = 1, .., n$, $t \geq 1$, *implica que*

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z - x_{n,j,t}}{z - p_{n,j,t}}\right)\right| \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1 - e^{-t} + x_{n,j,t}}{1 - e^{-t} + p_{n,j,t}}\right), \tag{3.14}$$

donde $z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq 1 - e^{-t}$.

Existe $M_4 = M_4(f) > 0$ *tal que (3.10,3.13,3.14) prueban el siguiente*

$$\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_{n,t,k} - \rho_{n,t,k}|^p\, W\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq M_4\, M(f, n, p, t, [a, b]), \tag{3.15}$$

donde $t \geq 1$, $k = 1, .., \nu + 1$.

Usando propiedades bien conocidas de la integral de Lebesgue, (3.7), (3.15) y la desigualdad

$$(\alpha + \beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p),$$

donde $\alpha, \beta > 0$, $p \geq 1$, *podemos concluir que*

$$R_{n,\nu}(f)_p \leq \left(\int_a^b |f_{n,\nu,t} - f|^p\, W\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{O}(M(f, n, p, t, [a, b])). \tag{3.16}$$

El término $R_{n,\nu}(f)_p$ *no depende de* t, *por consiguiente (3.16) satisface (3.1).* ■

Corolario 3.2.1 *Sea* f *una función tal que* $f \in H_\nu^p[a, b]$, *y* $\omega(f, \delta, [a, b]) = \mathcal{O}(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$. *Existe una constante* $c_0 > 0$ *tal que*

$$R_{n,\nu}(f)_p = \mathcal{O}\left(\exp(-c_0\sqrt{n})\right). \tag{3.17}$$

Demostración *Sea* $t = \gamma\sqrt{n}$. *De (3.16) y una selección conveniente de* $\gamma > 0$ *probamos (3.17).* ■

Sea f una función analítica a tramos en $[a, b]$, y supongamos que los puntos $\{x_1, ..., x_\nu\}$ son los únicos puntos singulares de f en $[a, b]$. Entonces en cada subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de analiticidad podemos encontrar una sucesión de polinomios $(p_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ que aproxima uniformemente a f sobre I_k, con velocidad geométrica.[6] Mediante un proceso simple de interpolación lineal, podemos

[6] Consultar la equivalencia (1.57) del capítulo 1.

modificar estos polinomios de modo que $q_{n,k}(x_k) = q_{n,k+1}(x_k)$, $k = 1, ..., \nu$, siendo $q_{n,k}$ el polinomio que resulta de modificar a $p_{n,k}$. Como conclusión podemos probar que existe una sucesión de polinomios a tramos que aproxima a f uniformemente sobre $[a, b]$, con velocidad exponencial.

El anterior comentario muestra que, a diferencia de los casos polinomial y racional, ambos de una pieza, la mejor aproximación polinomial a tramos converge exponencialmente a funciones analíticas a tramos. Obviamente, con más razón tendremos un resultado análogo para las funciones racionales a tramos.

El teorema 3.2.2 muestra cómo construir mediante interpolación racional, una sucesión de funciones racionales a tramos que converge exponencialmente a una función analítica a tramos.

Teorema 3.2.2 *Sea f una función en $H_{\nu,\epsilon}[a, b]$, con singularidades interiores en los puntos $\{x_1, ..., x_\nu\}$. Entonces existe $d = d(\epsilon, \{x_1, ..., x_\nu\}) > 0$, y una sucesión de funciones racionales a tramos $(f_{n,\nu})$, tal que*

$$\|f_{n,\nu} - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(e^{-dn}\right). \tag{3.18}$$

Demostración *Sean $\epsilon > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, y $f \in H_{\nu,\epsilon}[a, b]$, con ν singularidades interiores $x_1, .., x_\nu$. Aplicaremos el método usado en la demostración del teorema 3.2.1 para construir funciones racionales $r_{n,k,\epsilon} \in F_{n,n}$, cada una suficientemente próxima a f en los respectivos subintervalos $[x_{k-1} - \epsilon, x_k + \epsilon]$, $k = 1, ..., \nu + 1$.*

Para

$$\Delta_\nu = \frac{\min\limits_{1\le k\le \nu+1} \{l_k\}}{e - 1},$$

sea ϵ_1 definido como $\epsilon_1 = \Delta_\nu$ si $\epsilon > \Delta_\nu$, y $\epsilon_1 = \epsilon$ en los restantes casos. De este modo

$$t_{k,\epsilon} = \log\left(\frac{l_{k,\epsilon}}{\epsilon_1}\right) \ge 1,$$

donde $l_{k,\epsilon} = l_k + \epsilon_1$, $k = 1, .., \nu + 1$.

Recordemos que por definición $d_{k,\epsilon}(z) = z\, l_{k,\epsilon} + c_k$, $|z| < 1$, $k = 1, .., \nu + 1$. Ahora es fácil probar para $k = 1, .., \nu$, que se cumplen las siguientes igualdades.

$$d_{k,\epsilon}\left(1 - e^{-t_{k,\epsilon}}\right) = x_k; \quad d_{k+1,\epsilon}\left(-\left(1 - e^{-t_{k+1,\epsilon}}\right)\right) = x_k. \tag{3.19}$$

Para $k = 1, .., \nu + 1$; obtenemos de [124] que

$$\left(\int_{-1}^{1} |f \circ d_{k,\epsilon}((1 - e^{-t_{k,\epsilon}})x) - \Lambda_{n,t,k}((1 - e^{-t_{k,\epsilon}})x)|^p\, W \circ d_{k,\epsilon}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le M'\, t_{k,\epsilon} \exp\left(-\frac{nc}{t_{k,\epsilon}}\right). \tag{3.20}$$

Consideremos el sistema (3.8-3.9) con los parámetros

$$x_{n,j,t,k} = d_{k,\epsilon}\left(\frac{x_{n,j,t_{k,\epsilon}}}{1-\exp(-t_{k,\epsilon})}\right), \tag{3.21}$$

$$p_{n,j,t,k} = d_{k,\epsilon}\left(\frac{p_{n,j,t_{k,\epsilon}}}{1-\exp(-t_{k,\epsilon})}\right), \tag{3.22}$$

y los denominadores $q_{k,\epsilon} = q_{t,k}$, *con* $t = t_{k,\epsilon}$.

Sean $a_{j,k}$, $j = 1,..,n$; $k = 1,..,\nu+1$; *la solución del sistema modificado (3.8-3.9), de acuerdo con (3.21)-(3.22), y con* $a_{n,1} = \Gamma_{n,t}$, $t = t_{k,\epsilon}$; *y sea* $f_{n,\nu,\epsilon}$ *el correspondiente aproximante a tramos.*

Las desigualdades (3.19) producen que ambos términos en (3.11) tengan el mismo sumando $f(x_k)$, *de modo que son cancelados. Por tanto, tenemos que para* $k = 1,..,\nu+1$

$$\left| a_{n,k}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-e^{-t_{k,\epsilon}}+x_{n,j,t_{k,\epsilon}}}{1-e^{-t_{k,\epsilon}}+x_{n,j,t_{k,\epsilon}}}\right)\right| = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{c}{t_{k,\epsilon}}n\right)\right). \tag{3.23}$$

Entonces, para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,..,\nu+1$; *(3.20) y (3.23) nos da*

$$|f_{n,\nu,\epsilon}(x) - f(x)|\,W(x) \le |f_{n,\nu,\epsilon}(x) - \rho_{n,t,k}(x)|\,W(x) +$$

$$|\rho_{n,t,k}(x) - f(x)|\,W(x) \le M_5 \exp\left(-\frac{c}{t_{k,\epsilon}}n\right).$$

De la anterior desigualdad obtenemos que

$$R_{n,\nu}(f)_\infty \le M_5 \exp\left(-d\,n\right),$$

donde $d = c/t_\epsilon$ *y* $t_\epsilon = \max\{t_{k,\epsilon};\ k = 1,..,\nu+1\}$.

El teorema 3.2.2 está probado. ■

De la demostración del teorema 3.2.2, podemos fácilmente deducir que $d \le c$, donde c es la constante dada en el estimado de Gonchar (1.67). La desigualdad $d = c$ tiene lugar si

$$\epsilon > \frac{b-a}{2(\nu+1)(e-1)},$$

y f tiene singularidades equidistantes. Valores pequeños de uno de los parámetros ϵ o Δ_ν hacen que d sea también pequeño.

El estimado (3.1), aplicado a $f \in H^p_\nu[a,b] \bigcap Lip\ \alpha$, muestra un orden de convergencia algo mayor que el dado por el estimado (1.66) del teorema B de Szabados (ver el Corolario 3.2.1, en la sección 3.2). Asimismo, el teorema 3.2.2 afirma que la aproximación racional a tramos para $f \in H_{\nu,\epsilon}[a,b]$ es en general mejor que la racional. De la teoría de Gonchar [100] inferimos que la correspondiente clase de singularidades características interiores está asociada a la atracción de nodos óptimos.[7]

Los estimados (3.1, 3.18) pueden ser usados para estudiar el comportamiento del método racional usado en [112] cuando el número de parámetros es grande. Un esbozo de [112] está dado en la sección 1.2 del capítulo 1.

Definición 3.2.1 *El módulo integral de continuidad de $f \in H^p_\nu(a,b)$, relativo al subintervalo k-ésimo de la subdivisión $\{x_k\}_{k=1}^{k=\nu}$, está dado por*

$$\omega_{p,k}(f,\delta) =$$

$$\sup_{0<h<\delta} \left(\int_{-1}^{1} |f \circ d_k(x) - f \circ d_k((1-h)x)|^p \, W \circ d_k(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.24}$$

El módulo de continuidad uniforme $\omega(f,\delta,(a,b))$ no tiende a cero cuando $\delta \to 0$ para cada $f \in H^p_\nu(a,b)$. Para este caso podemos demostrar el teorema 3.2.3, más general que los teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

Teorema 3.2.3 *Sea f una función en $H^p_\nu(a,b)$, $1 \le p \le \infty$, con singularidades interiores $\{x_1, ..., x_\nu\}$. Entonces*

$$R_{n,\nu}(f)_p = \mathcal{O}\left(\inf_{t\ge 1} \left\{ \max_{1\le k\le \nu} \omega_k(f, e^{-t}) + \max_{1\le k \le \nu+1} \omega_{p,k}(f, e^{-t}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. t \exp\left(-\frac{nc}{t} + \frac{t}{p} \right) \right\} \right),$$

donde

$$\omega_k(f,\delta) = \sup\{\, |f(x_k) - f(y)|;\ y \in [c_k, c_{k+1}],\ |x_k - y| < \delta \,\}.$$

Demostración *Haremos una ligera modificación a la prueba del teorema 3.2.1. La desigualdad (3.3) no es aquí utilizada porque desconocemos el comportamiento de $f \in H^p_\nu(a,b)$ en los puntos extremos del intervalo. Por tanto, el módulo integral de continuidad (3.24) debemos conservarlo en lo que sigue. El resto de la prueba es igual excepto la desigualdad (3.13), que debe ser mejorada de acuerdo a las siguientes desigualdades para $k = 1,..,\nu$.*

$$|f \circ d_{k+1}(-(1-e^{-t})) - f \circ d_k((1-e^{-t}))| \le M_4\, \omega(f, x_k, e^{-t}, [c_k, c_{k+1}]).$$

■

[7] Ver las proposiciones 3.35, 3.36, 3.37, en la sección 3.3.

3.3. Aproximación discreta a tramos

El objetivo de este epígrafe es mostrar una versión discreta del método de aproximación racional a tramos estudiado en el epígrafe 3.2 (ver [129]). La tarea consiste en aproximar funciones continuas, analíticas a tramos y de clase H^∞ a tramos sobre el intervalo $[-1,1]$, con respecto a seminormas uniformes con peso.

Una de las principales características de estos aproximantes es que todas las piezas racionales tienen solamente polos reales. Esta característica, usada en [112] para disminuir de manera efectiva el costo computacional del método, no resulta perjudicial en la teoría, tal como se mostró en el epígrafe 3.2.

Los estimados obtenidos para funciones continuas en el subepígrafe 3.3 son lo suficientemente precisos como para ser reutilizados en el epígrafe 3.3.2 para obtener resultados de convergencia relativos a funciones analíticas a tramos, cuando consideramos simultáneamente que la densidad del conjunto discreto tiende a cero y el orden de las piezas tiende al infinito.

La descripción de los aproximantes racionales a tramos, y la demostración de algunas proposiciones, están algo cargadas de detalles, ciertamente innecesarios para el lector experto, pero posiblemente útiles para el estudiante interesado en el tema.

3.3.1. Aproximación de funciones continuas

Sean $n, m, \nu \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $M > 1$, y $a, b \in \mathbb{R}$ fijos tales que $a < b$.

Definamos el conjunto $K(n,m,\nu,\delta) \subset \mathbb{R}^p$, $p = (\nu+1)(n+m+2)-1$, de los vectores con la forma

$$\overline{v} = (a_{j,k}, p_{d,k}, \tau_s), \tag{3.25}$$

$j = 0, ..., n,\ k = 1, ..., \nu+1, d = 1, ..., m,\ s = 1, ..., \nu$; tales que

$$p_{j,k} \in \{\mathbb{R} \backslash]\tau_{k-1} - \delta, \tau_k + \delta[\} \cap [-M, M],\ j = 1, ..., m;\ k = 1, ..., \nu+1, \tag{3.26}$$

$$\frac{a_{n,k}\tau_k^n + ... + a_{0,k}}{\prod_{j=1}^m (\tau_k - p_{j,k})} = \frac{a_{n,k+1}\tau_k^n + ... + a_{0,k+1}}{\prod_{j=1}^m (\tau_k - p_{j,k+1})},\ k = 1, ..., \nu, \tag{3.27}$$

$$-1 \le \tau_k \le 1,\ k = 1, ..., \nu, \tag{3.28}$$

$$\tau_k + \delta \le \tau_{k+1},\ k = 0, ..., \nu, \tag{3.29}$$

donde $\tau_0 = -1$ y $\tau_{\nu+1} = 1$. Las ecuaciones (3.27) se corresponden con las definidas en (3.8), y están dadas con el objetivo de producir aproximantes continuos y garantizar la existencia del mejor aproximante. Ofrecen, además, una fórmula recurrente ya utilizada en la primera parte de este capítulo.

Si fijamos los valores de los parámetros $p_{j,k}$: $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., \nu + 1$, τ_k: $k = 1, ..., \nu$, la condición (3.27) define un sistema lineal homogéneo de ecuaciones con $(n+1)(\nu+1)$ incógnitas $a_{i,j}$, y ν ecuaciones, con soluciones no triviales. Como el rango de la matriz del sistema es ν, concluimos que $K(n, m, \nu, \delta)$ y $S_{n,m,\nu,\delta}$ son clases no vacías.

Definición 3.3.1 *La clase $S_{n,m,\nu,\delta}$ está formada por las funciones $f_{n,m,\nu,\delta}$ definidas en el intervalo $[-1, 1]$, tales que existe un vector $\overline{v} \in K(n, m, \nu, \delta)$, con la forma (3.25), y*

$$f_{n,m,\nu,\delta}(x) = \frac{a_{n,k}x^n + ... + a_{0,k}}{\prod_{j=1}^{m}(x - p_{j,k})},$$

para $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, ..., \nu + 1$.

En lo sucesivo asumiremos que la función de peso W cumple que $W \neq 0$ Lebesgue casi dondequiera, y que

$$P_{n,k}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k}x^i,\ Q_{m,k}(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - p_{j,k}),\ \|(a_{j,k})\|_1 = \sum_{k=1}^{\nu+1}\sum_{j=0}^{n} |a_{j,k}|,$$

para $k = 1, ..., \nu + 1$

Proposición 3.3.1 *Sea $\emptyset \neq Y \subset X$ tal que*

$$|Y| \leq \rho < \frac{1}{2} \min_{k=1,\nu+1} |\tau_k - \tau_{k-1}|.$$

Entonces $Y \cap Y_k \neq \emptyset$, y $|Y|_{[\tau_{k-1},\tau_k]} < 2\rho$, para todo k, $k = 1, ..., \nu + 1$.[8]

Demostración *Si para algún k, $Y \cap Y_k = \emptyset$, el punto medio $\tau_0 = (\tau_k + \tau_{k-1})/2$ del intervalo Y_k cumple que $d(\tau_0, Y) > \rho$ y por tanto $|Y| > \rho$.*

Si para cierto k,

$$|Y|_{[\tau_{k-1},\tau_k]} > 2\rho,$$

entonces existe $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \backslash Y$ tal que

$$[x - 2\rho, x + 2\rho] \cap [\tau_{k-1}, \tau_k] \cap Y = \emptyset.$$

Al menos uno de los subintervalos $[x - 2\rho, x]$ y $[x, x + 2\rho]$ está contenido estrictamente en $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, pues de lo contrario tendríamos que $Y \cap [\tau_{k-1}, \tau_k] = \emptyset$. Supongamos que $[x, x + 2\rho] \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Inferimos que $d(x + \rho, Y) > \rho$, y por tanto $|Y| > \rho$. ■

[8] Ver la definición de $|Y|_Z$ en la página 13.

Proposición 3.3.2 *Sea $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$, con parámetros $a_{j,k}$: $j = 0, ..., n$, $k = 1, ..., \nu + 1$; $p_{j,k}$: $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., \nu + 1$; τ_k: $k = 1, ..., \nu$. Entonces, cualesquieran sean $x, y \in X$ se cumple que*

$$|f_{n,m,\nu,\delta}(x) - f_{n,m,\nu,\delta}(y)| \leq \frac{(1 + M)^m(n + m)}{\delta^{2m}}\|(a_{j,k})\|_1|x - y|. \tag{3.30}$$

Demostración *Atendiendo a la definición 3.3.1, comencemos considerando los términos*

$$g_{i,k}(x) = \frac{x^i}{Q_{m,k}(x)},\ i = 0, ..., n,\ k = 1, ..., \nu + 1.$$

Luego, si $x, y \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, tendremos que

$$\begin{aligned} |g_{i,k}(x) - g_{i,k}(y)| &= \left|\frac{x^i}{Q_{m,k}(x)} - \frac{y^i}{Q_{m,k}(y)}\right| \\ &\leq \delta^{-2m}\left|x^i\, Q_{m,k}(y) - y^i\, Q_{m,k}(x)\right| \\ &\leq \delta^{-2m}\left(|Q_{m,k}(y)|\,|x^i - y^i| \,+\, |y^i|\,|Q_{m,k}(y) - Q_{m,k}(x)|\right). \end{aligned}$$

El teorema del valor medio, teniendo en cuenta que $|y|, |x| \leq \max\{|a|, |b|\}$, y $|p_{j,k}| \leq M$, prueba el estimado (3.30) para $x, y \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, escribiendo $\sum_{i=0}^n |a_{i,k}|$ en lugar de $\|(a_{j,k})\|_1$.

En general, si $x, y \in X$, con $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ y $y \in Y_{k'}$, $1 \leq k \leq k' \leq \nu + 1$, sin perder generalidad consideramos los nodos intermedios

$$x \leq \tau_k \leq ... \leq \tau_{k'-1} < y.$$

Entonces para los pares (x, τ_k),...,$(\tau_{k'-1}, y)$ se cumple el estimado (3.30) con $\sum_{i=0}^n |a_{i,k}|$ en lugar de $\|(a_{j,k})\|_1$. Es decir

$$\begin{gathered} |f_{n,m,\nu,\delta}(x) - f_{n,m,\nu,\delta}(y)| \leq \\ |f_{n,m,\nu,\delta}(x) - f_{n,m,\nu,\delta}(\tau_k)| + ... + |f_{n,m,\nu,\delta}(\tau_{k'-1}) - f_{n,m,\nu,\delta}(y)| \leq \\ \frac{(1 + M)^m(n + m)}{\delta^{2m}}\left[\sum_{i=0}^n |a_{i,k}||x - \tau_k| + ... + \sum_{i=0}^n |a_{i,k'}||y - \tau_{k'-1}|\right] \leq \\ \frac{(1 + M)^m(n + m)}{\delta^{2m}}\left[\|(a_{j,k})\|_1\right](|x - \tau_k| + ... + |y - \tau_{k'-1}|). \end{gathered}$$

Dado que $|x - \tau_k| + ... + |y - \tau_{k'-1}| = |x - y|$, queda demostrada la proposición. ■

El siguiente lema es fácil de demostrar.

Lema 3.3.1 *Sean $a < \tau_1 < ... < \tau_\nu < b$, $a < \tau'_1 < ... < \tau'_\nu < b$ dos subdivisiones del intervalo $[-1,1]$, ambas cumpliendo (3.29). Sea $T : X \to X$ la función definida por $T(x) = T_k(x)$, si $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, siendo*

$$T_k : [\tau'_{k-1}, \tau'_k] \to [\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = 1, ..., \nu,$$

las funciones definidas por

$$T_k(x) = \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\tau'_k - \tau'_{k-1}} x + \frac{\tau_{k-1}\tau'_k - \tau'_{k-1}\tau_k}{\tau'_k - \tau'_{k-1}}, \; k = 1, ..., \nu + 1.$$

Entonces T es continua y

$$|T(x) - x| \leq \frac{2}{\delta} \sum_{k=1}^{\nu} |\tau'_k - \tau_k|. \tag{3.31}$$

Proposición 3.3.3 *Sean $f_{n,m,\nu,\delta}, f'_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$, asociados a los vectores $\overline{v}$ y $\overline{v}'$ respectivamente.*(9

Sea $\|f\|_{W,Y}$ según la definición dada en la página 13. El siguiente estimado tiene lugar.

$$\|f_{n,m,\nu,\delta} - f'_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \leq$$

$$M_1\left(\sum_{k=1}^{\nu} |\tau_k - \tau'_k| + \sum_{k=1}^{\nu+1}\left(\sum_{i=0}^{n} |a_{i,k} - a'_{i,k}| + \sum_{i=1}^{m} |p_{i,k} - p'_{i,k}|\right)\right), \tag{3.32}$$

donde $Y \subset X$, $\delta < 1$, y M_1 está dado por

$$M_1 = 2\|W\|_{1,X} \frac{(1 + M)^m (n + m)}{\delta^{2m+1}} \text{máx}\{1, \; \|(a_{i,k})\|_1, \; \|(a'_{i,k})\|_1\}.$$

Demostración *Sea $x \in [\tau'_{k-1}, \tau'_k]$, para algún k. Por $P'_{n,k}$, $Q'_{m,k}$ denotamos ahora a los correspondientes polinomios con parametros $a'_{i,j}$, $p'_{j,k}$, τ'_k. Las siguientes desigualdades tienen lugar.*(10

$$|\left(f_{n,m,\nu,\delta}(x) - f'_{n,m,\nu,\delta}(x)\right) W(x)| \leq$$

$$\|W\|_{1,X} \left[| \left(f_{n,m,\nu,\delta}(x) - f_{n,m,\nu,\delta}(T(x))\right) | + \right.$$

$$\left| \frac{P_{n,k}(T(x))}{Q_{m,k}(T(x))} - \frac{P'_{n,k}(T(x))}{Q_{m,k}(T(x))} \right| + \left| \frac{P'_{n,k}(T(x))}{Q_{m,k}(T(x))} - \frac{P'_{n,k}(x)}{Q_{m,k}(T(x))} \right|$$

$$\left. + \left| \frac{P'_{n,k}(x)}{Q_{m,k}(T(x))} - \frac{P'_{n,k}(x)}{Q'_{m,k}(x)} \right| \right] \leq$$

9 Ambos vectores pertenecen a $K(n, m, \nu, \delta)$. Las componentes de $\overline{v}'$ son $a'_{j,i}$, $p'_{i,k}$ y τ'_k.

10 El símbolo $[x]$ denota a la parte entera de x.

$$\|W\|_{1,X}\left[\frac{2\,(1+M)^m(n+m)\|(a_{j,k})\|_1}{\delta^{2m+1}}\sum_{k=1}^{\nu}|\tau'_k-\tau_k|+\right.$$
$$\frac{1}{\delta^m}\sum_{i=0}^{n}\left|a'_{i,k}-a_{i,k}\right|+\frac{\|(a'_{j,k})\|_1}{\delta^m}\left|T(x)^j-x^j\right|+$$
$$\left.\frac{\|(a'_{j,k})\|_1}{\delta^{2m}}\left|Q'_{m,k}(x)-Q_{m,k}(T(x))\right|\right].$$

Para terminar la demostración basta tener en cuenta que (ver lema 3.3.1)

$$\left|T(x)^j-x^j\right|\leq\frac{2n}{\delta}\sum_{k=1}^{\nu}|\tau'_k-\tau_k|;\;\; j=1,...,n,$$

para $x\in X$*. Además, para* $k=1,...,\nu+1$*,* $m\in\mathbb{N}$*, tiene lugar el siguiente estimado*

$$\left|Q'_{m,k}(x)-Q_{m,k}(T(x))\right|\leq$$
$$\frac{2m}{\delta}(1+M)^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{\nu}|\tau'_j-\tau_j|+\sum_{j=1}^{m}|p_{j,k}-p'_{j,k}|\right),$$

con lo que termina la demostración. ■

Corolario 3.3.1 *Sean* $f\in C(X)$*,* $\emptyset\neq Y\subset X$*. La función* $\Phi: K(n,m,\nu,\delta)\to\mathbb{R}$*, definida por* $\Phi(a_{i,j},p_{j,k},\tau_k)=\|f-f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}$*, es continua.*

Demostración *Sean los vectores* $\overline{v},\overline{v'}\in K(n,m,\nu,\delta)$ *y sean* $f_{n,m,\nu,\delta},f'_{n,m,\nu,\delta}\in S_{n,m,\nu,\delta}$ *las correspondientes funciones racionales a tramos. Sean además* $\overline{v'}$ *fijo y* $\|(a_{i,j}-a'_{i,j})\|_1\leq 1$ *de modo que* M_1 *puede ser tomado en (3.32) como*

$$M_1=\frac{2\|W\|_{1,X}(1+M)^m(n+m)}{\delta^{2m+1}}(\|(a'_{i,k})\|_1+1).$$

La proposición 3.3.3 y

$$\Big|\|f-f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}-\|f-f'_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}\Big|\leq\|f_{n,m,\nu,\delta}-f'_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y},$$

terminan la prueba del corolario 3.3.1. ■

Observemos que la proposición 3.3.3 no expresa la continuidad uniforme del funcional Φ.

Lema 3.3.2 *Para cada* $\alpha>1$ *existe* $\rho=\rho(n,m,\delta)>0$*, tal que cada* $f_{n,m,\nu,\delta}\in S_{n,m,\nu,\delta}$ *satisface*

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X}\leq\alpha\,\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y},$$

siempre que $|Y|<\rho$*.*

Demostración *Sea $I(n,m,\nu,\delta)$ el conjunto de los aproximantes $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$, tales que el vector asociado $\overline{v} \in K(n,m,\nu,\delta)$, satisface*[11

$$\|(a_{j,k})\|_1 = 1. \tag{3.33}$$

Sea $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$. Entonces tenemos que

$$f_{n,m,\nu,\delta}(x) = \frac{P_{n,k}(x)}{Q_{m,k}(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k} g_{i,k}(x), \tag{3.34}$$

$x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, ..., \nu+1$, *donde*

$$g_{i,k}(x) = \frac{x^i}{Q_{m,k}(x)},$$

$i = 0, ..., n$, $k = 1, ..., \nu+1$.

La independencia lineal del conjunto $\{g_{0,k}, ..., g_{n,k}\}$, y la continuidad de cada $g_{i,k}$ sobre $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, son obvias. La subclase $I(n,m,\nu,\delta)$ es compacta y ninguno de los conjuntos $\{x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]; W(x) \neq 0\}$, $k = 1, ..., \nu+1$, puede ser finito. Las afirmaciones anteriores y el corolario 3.3.1 permiten decir que existe $f^0_{n,m,\nu,\delta} \in I(n,m,\nu,\delta)$ tal que

$$\inf\left\{\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X};\ f_{n,m,\nu,\delta} \in I(n,m,\nu,\delta)\right\} = \|f^0_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} =$$

$$\Theta(n,m,\nu,\delta) > 0, \tag{3.35}$$

y por tanto, para cada $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$, con parámetros de acuerdo con (3.25), tenemos que

$$\Theta(n,m,\nu,\delta)\left(\|(a_{j,k})\|_1\right) \leq \|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X}. \tag{3.36}$$

Sea $\alpha > 1$ y tomemos $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$. Existe $x_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, para algún k, tal que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} = |f_{n,m,\nu,\delta}(x_k) W(x_k)|.$$

Sea $Y \subset X$ con

$$|Y| < \rho < \min_{k=1,\dots,\nu+1} |\tau_k - \tau_{k-1}|/2,$$

siendo τ_k el k-ésimo nodo de $f_{n,m,\nu,\delta}$. La proposición 3.3.1 garantiza la existencia de $y_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \cap Y$, tal que $|x_k - y_k| < 2\rho$. Tenemos que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} = |r_{k,n,m,\delta}(x_k) W(x_k)| \leq$$

$$|W(x_k) r_{k,n,m,\delta}(x_k) - W(x_k) r_{k,n,m,\delta}(y_k)| +$$

[11] El vector $\overline{v}$ tiene la forma dada por (3.25)

$$|W(x_k)r_{k,n,m,\delta}(y_k) - W(y_k)r_{k,n,m,\delta}(y_k)| + |W(y_k)r_{k,n,m,\delta}(y_k)|.$$

De la proposición 3.3.2, (3.36), y las desigualdades anteriores deducimos que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} \leq \|(a_{j,k})\|_1 \left(\frac{2\rho(M+1)^m(n+m)\|W\|_{1,X}}{\delta^{2m}} + \frac{\omega(W,\rho)}{\delta^m}\right) + \|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}. \tag{3.37}$$

Combinando (3.36) y (3.37) obtenemos que

$$\|(a_{i,k})\|_1 \left(\Theta(n,m,\nu,\delta) - \frac{2\rho(M+1)^m(n+m)\|W\|_{1,X}}{\delta^{2m}} - \frac{2\omega(W,\rho)}{\delta^m}\right) \leq \|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}. \tag{3.38}$$

Finalmente, de (3.38) tenemos que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} \leq \alpha(n,m,\nu,\delta,\rho)\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}, \tag{3.39}$$

donde $\overline{\alpha} = \alpha(n,m,\nu,\delta,\rho)$ *está dada por*

$$\overline{\alpha} - 1 = \frac{2\rho(M+1)^m(n+m)\|W\|_{1,X} + \delta^m\omega(W,\rho)}{\delta^{2m}\Theta(n,m,\nu,\delta) - 2\rho(M+1)^m(n+m)\|W\|_{1,X} - 2\delta^m\omega(W,\rho)}. \tag{3.40}$$

Si fijamos los valores de n,m,ν,δ, *y tomamos* ρ *suficientemente pequeño, de (3.40) se tiene que* $\alpha(n,m,\nu,\delta,\rho) < \alpha$ *cualesquiera sean los parámetros* $p_{i,j}$, $a_{i,j}$ *y* τ_k *de* $f_{n,m,\nu,\delta}$. *Finalmente (3.39) demuestra el lema.* ■

El lema 3.3.2 expresa que para $|Y|$ suficientemente pequeño de $f_{n,m,\nu,\delta} \neq 0$ se tiene que $\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \neq 0$.

La desigualdad (15,[112]) no es correcta. Ésta debería ser deducida de (3.37) para el caso particular $\nu = 1$.

Teorema 3.3.1 *Sea* $f \in C(X)$. *Para cada* $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$ *las seminormas* $\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}$, $Y \subset X$, *convergen a* $\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X}$ *cuando* $|Y| < \rho \to 0$, *de acuerdo con la siguiente desigualdad.*

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} \leq 3\|W\|_{1,X}\omega(f,\rho) + 3\Big(\|f\|_\infty + d\,\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X}\Big)\omega(W,\rho) + \|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} + d\,\rho\,\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X}, \tag{3.41}$$

donde $d = d(n,m,\nu,\delta) > 0$ *no depende de* Y *y* ρ.

Demostración *Sea $Y \subset X$, tal que*

$$|Y| < \rho < \min_{k=1,\ldots,\nu+1} |\tau_k - \tau_{k-1}|/2.$$

Existen k, $1 \le k \le \nu + 1$, y $x_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ tales que

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} = \left| \left(f(x_k) - \frac{P_{n,k}(x_k)}{Q_{m,k}} \right) W(x_k) \right|.$$

La proposición 3.3.1 permite que seleccionemos $y \in Y \cap [\tau_{k-1}, \tau_k]$ de modo que $|x_k - y| < 2\rho$.

Entonces tenemos que

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,X} \le |f(x_k)W(x_k) - f(y)W(x_k)| + |f(y)W(x_k) - f(y)W(y)| +$$

$$|(f(y) - f_{n,m,\nu,\delta}(y))W(y)| + \left| \frac{P_{n,k}(y)}{Q_{n,k}(y)} W(y) - \frac{P_{n,k}(x_k)}{Q_{n,k}(x_k)} W(y) \right| +$$

$$\left| \frac{P_{n,k}(x_k)}{Q_{n,k}(x_k)} W(y) - \frac{P_{n,k}(x_k)}{Q_{n,k}(x_k)} W(x_k) \right| \le$$

$$\|W\|_{1,X}\,\omega(f, 2\rho) + \|f\|_\infty \omega(W, 2\rho) + \|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} +$$

$$2\|W\|_{1,X} H(n, m, \delta)\rho\|(a_{j,k})\|_1 + \frac{2M^n}{\delta^m} \|(a_{j,k})\|_1\, \omega(W, \rho).$$

De (3.36), basta tomar d de la forma siguiente

$$d = d(n, m, \nu, \delta) :=$$

$$\max \left\{ \frac{2\|W\|_{1,X}(1 + M)^m(n + m)}{\delta^{2m}\Theta(n, m, \nu, \delta)}, \frac{M^n}{\delta^m \Theta(n, m, \nu, \delta)} \right\}, \tag{3.42}$$

para terminar la demostración. ■

Definición 3.3.2 *La mejor aproximación racional a tramos de $f \in C(X)$, sobre $Y \subset X$, respecto a W, de orden (n, m), con ν nodos internos y tolerancia δ, está dada por*

$$R_{n,m,\nu,\delta}(f)_{W,Y} := \inf\{\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y};\ f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}\}.$$

Proposición 3.3.4 *Sean $f \in C(X)$ y $\emptyset \ne Y \subset X$. Para $|Y|$ suficientemente pequeño existe $f_{n,m,\nu,\delta} = f_{n,m,\nu,\delta,Y} \in S_{n,m,\nu,\delta}$ tal que*

$$R_{n,m,\nu,\delta}(f)_{W,Y} = \|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}. \tag{3.43}$$

Demostración *Si fijamos los valores de los parámetros* $p_{i,j}$, τ_k, n, m, ν *y* δ; $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., \nu + 1$, $k = 1, ..., \nu + 1$, *la correspondiente clase* $S_{n,m,\nu,\delta}$ *se convierte en un espacio lineal*

$$E_{n,m,\nu,\delta} = E_{n,m,\nu,\delta}(p_{i,j},\ \tau_k;\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., \nu + 1)$$

de dimensión $n(\nu + 1) + 1$. *En estas condiciones la mejor aproximación a* f, *según los parámetros* $a_{i,j}$, $i = 0, ..., n$, $j = 1, ..., \nu + 1$; *debe ser hallada entre aquellos* $f_{n,m,\nu,\delta} \in E_{n,m,\nu,\delta}$ *con*

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \le \|f\|_{W,Y}. \tag{3.44}$$

Sea $\mathcal{K}$ *la subclase de* $K(n, m, \nu, \delta)$, *sujeta a la restricción (3.44). Para probar que* $\mathcal{K}$ *es un conjunto compacto basta demostrar que las coordenadas* $a_{i,j}$ *de todo vector* $\overline{v} \in \mathcal{K}$ *cumplen una desigualdad* $|a_{i,j}| \le C_0$, *siendo* C_0 *independiente de los parámetros* $p_{i,j}$, τ_k; $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., \nu + 1$, $k = 1, ..., \nu + 1$.

Si $|Y|$ *es suficientemente pequeño, del lema 3.3.2 y la proposición 3.3.1 se tiene que* $\|\cdot\|_{W,Y}$ *es una norma sobre* $E_{n,m,\nu,\delta}$ *y que* $Y \cap [\tau_{k-1}, \tau_k] \ne \emptyset$, $k = 1, ..., \nu + 1$. *Además, podemos asegurar que*

$$\sup_{x \in Y \cap [\tau_{k-1}, \tau_k]} |W(x)| > 0,$$

$k = 1, ..., \nu + 1$.

Asumiendo que los polos $p_{i,j}$ *y los nodos* τ_k *están fijos tenemos que*

$$0 < \Theta(n, m, \nu, \delta, Y) = \inf_{f_{n,m,\nu,\delta} \ne 0} \frac{\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y}}{\|(a_{i,k})\|_1},$$

donde el ínfimo se toma para $f_{n,m,\nu,\delta} \in E_{n,m,\nu,\delta}$.

El número $\Theta(n, m, \nu, \delta, Y)$ *depende de los parámetros de la clase* $S_{n,m,\nu,\delta}$ *que hemos fijado al inicio. No obstante, se puede comprobar que*

$$\frac{\Theta(n, W, Y)}{(\nu + 1)(M + 1)^m} \le \Theta(n, m, \nu, \delta, Y), \tag{3.45}$$

donde $\Theta(n, W, Y) > 0$ *sólo depende de* n *y del peso* W.

En efecto, si $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ *tenemos que*

$$|W(x) f_{n,m,\nu,\delta}(x)| = \left| \frac{W(x)\, P_{n,k}(x)}{Q_{m,k}(x)} \right| \ge \frac{|W(x)\, P_{n,k}(x)|}{(M + 1)^m}.$$

Luego, para $x \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \cap Y$ *deducimos que*

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \ge |W(x)| \frac{|P_{n,k}(x)|}{(M + 1)^m}.$$

Sea $\Theta(n,W,Y) = \text{mín}_{k=1,\dots,\nu+1}\Theta_{n,k}$, *donde* $\Theta_{n,k}$ *está definida por*

$$\Theta_{n,k} = \inf\left\{\sup_{x\in Y\cap[\tau_{k-1},\tau_k]} |W(x)\, P_{n,k}(x)|;\ \sum_{i=0}^{n} |a_{i,k}| = 1\right\} > 0.$$

De lo anterior tenemos que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \geq \frac{\Theta(n,W,Y)\sum_{i=0}^{n}|a_{i,k}|}{(M+1)^m},\quad k = 1,\dots,\nu+1,$$

y por tanto

$$\|f_{n,m,\nu,\delta}\|_{W,Y} \geq \frac{\|(a_{i,k})\|_1\, \Theta(n,W,Y)}{(\nu+1)(M+1)^m},$$

de donde se obtiene (3.45).

La condición (3.44) implica que

$$\|(a_{i,k})\|_1 \leq \frac{2(\nu+1)(M+1)^m}{\Theta(n,W,Y)}\|f\|_{W,Y}. \tag{3.46}$$

Dado que el estimado (3.46) no depende de $p_{i,j}$ *y* τ_k, *terminamos de probar que la clase* $\mathcal{K}$ *de los* $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta}$ *que cumplen (3.44) es compacta.*

El corolario 3.3.1 termina la demostración. ∎

En lo que sigue $f_{n,m,\nu,\delta,Y} \in S_{n,m,\nu,\delta}$ denotará una solución de (3.43) para la función $f \in C(X)$

Teorema 3.3.2 *Sea* $f \in C(X)$. *Entonces*

$$\text{lím}\,\|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X} = R_{n,m,\nu,\delta}(f)_{W,X},$$

cuando $|Y| \to 0$, *de acuerdo con la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned}\|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X} &\leq R_{n,m,\nu,\delta}(f)_{W,X} + 3\|W\|_{1,X}\omega(f,\rho) + \\ &3\Big(\|f\|_\infty + 4d\,\|f\|_{W,X}\Big)\omega(W,\rho) + 4d\,\rho\,\|f\|_{W,X},\end{aligned} \tag{3.47}$$

donde $d = d(n,m,\nu,\delta)$ *está dado por (3.42),* $|Y| = \mathcal{O}(\rho)$, *y* $\rho > 0$ *es suficientemente pequeño.*

Demostración *De las desigualdades*

$$\begin{aligned}\|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,Y} &\leq \|f - f_{n,m,\nu,\delta,X}\|_{W,Y} \leq \\ \|f - f_{n,m,\nu,\delta,X}\|_{W,X} &\leq \|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X},\end{aligned} \tag{3.48}$$

y el teorema (3.3.1), obtenemos que

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X} - \|f - f_{n,m,\nu,\delta,X}\|_{W,X} \leq 3\|W\|_{1,X}\omega(f,\rho)+$$
$$3\Big(\|f\|_\infty + d\,\|f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X}\Big)\omega(W,\rho) + d\,\rho\,\|f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X}. \tag{3.49}$$

La siguiente desigualdad es consecuencia de las definiciones de $f_{n,m,\nu,\delta,Y}$ *y* $\|\cdot\|_{W,Y}$.

$$\|f - f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,Y} \leq \|f\|_{W,Y} \leq \|f\|_{W,X}.$$

Es decir, se cumple que

$$\|f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,Y} \leq 2\|f\|_{W,X}.$$

El lema 3.3.2 nos permite hallar un $\rho = \rho(n,m,\delta) > 0$ *tal que*

$$\|f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,X} \leq \alpha(n,m,\nu,\delta,\rho)\|f_{n,m,\nu,\delta,Y}\|_{W,Y} \leq 4\,\|f\|_{W,X}, \tag{3.50}$$

siempre que $|Y| < \rho$. *De (3.49) y (3.50) concluimos la prueba del teorema 3.3.2.*

■

3.3.2. Aproximación de funciones con singularidades

En esta sección asumiremos que $n = m$. Nuestro objetivo ahora consiste en demostrar que dada una función $f \in H_\nu^\infty[-1,1]$ pueden hallarse sucesiones Y_n, $Y_n \subset X$, y sucesiones de aproximantes óptimos respecto a las seminormas $\|\cdot\|_{W,Y_n}$, de modo que converjan a f en la norma $\|\cdot\|_{W,X}$, cuando $n \to \infty$.

Teorema 3.3.3 *Sea* $f \in H_\nu^\infty[-1,1]$. *Existen sucesiones* (δ_n), *y* (ρ_n), $\delta_n > 0$, $\rho_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *tales que para toda sucesión* Y_n, $Y_n \subset X = [-1,1]$, $|Y_n| \leq \rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que*

$$\lim_n \|f - f_{n,n,\nu,\delta_n,Y_n}\|_{W,X} = 0.$$

Demostración *Sean* $\{x_1, ..., x_\nu\}$ *las singularidades internas de la función* f. *Sean*

$$M(n,j,t) = (4e^t - 3)\exp(-tj/n),$$
$$p_{n,j,t} = (1 - e^{-t}/2)(M(n,j,t)+1)/(M(n,j,t)-1),$$

$j = 1, ..., n$, $t \geq 1$.

En el teorema 1 de [129] se construye convenientemente una función racional a tramos $f_{n,\nu,t}$, $t \geq 1$, *de grado* $n = m$, *con el objetivo de aproximar suficientemente a* f. *La* k*-ésima pieza racional de* $f_{n,\nu,t}$ *tiene polos*

$$p_{n,j,t,k} = \frac{p_{n,j,t} l_k}{1 - e^{-t}} + c_k,$$

para los cuales se cumple que

$$\mathcal{D}(p_{n,j,t,k},[x_{k-1},x_k]) = l_k\left[\left(\frac{2-e^{-t}}{2(1-e^{-t})}\right)\left(\frac{M(n,j,t)+1}{M(n,j,t)-1}\right)-1\right], \qquad (3.51)$$

donde $t \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1,...,n$, $k = 1,...,\nu+1$, *y* $\mathcal{D}$ *es la distancia euclideana sobre* $\mathbb{R}$.

Sea Δ_n *definida por la siguiente expresión*

$$\Delta_n = \text{mín}\left\{\mathcal{D}(p_{n,j,\sqrt{n},k};[x_{k-1},x_k]);\ k = 1,...,\nu+1, j = 1,...,n\right\}.$$

La tolerancia $\delta = \delta_n$ *está dada por*

$$\delta_n = \text{mín}\left\{\min_{k=1,\dots,\nu+1}\frac{l_k}{2},\Delta_n\right\}. \qquad (3.52)$$

Del ([129], teorema 1) obtenemos que

$$R_{n,n,\nu,\delta_n}(f)_{W,X} \leq$$
$$\|f - f_{n,\nu,\sqrt{n}}\|_{W,X} = \mathcal{O}(\omega(f,e^{-\sqrt{n}},X) + \sqrt{n}\exp(-\sqrt{n}c)). \qquad (3.53)$$

Sean

$$\alpha(n,\nu) = \alpha(n,n,\nu,\delta_n,\rho_n)$$

y

$$d(n,\nu) = d(n,n,\nu,\delta_n)$$

dadas por (3.40) y (3.42) respectivamente, y (ρ_n) *una sucesión no negativa con* $\text{lím}_n\,\rho_n = 0$, *de modo que*

$$\begin{aligned}\alpha(n,\nu) &= \mathcal{O}(1), & (3.54)\\ \lim_n d(n,\nu)\,\rho_n &= 0, & (3.55)\\ \lim_n d(n,\nu)\omega(W,\rho_n) &= 0. & (3.56)\end{aligned}$$

Una tal sucesión $(\rho_n^{(1)})$ *para la cual las condiciones (3.54), (3.55) son satisfechas, puede ser construida. Por ejemplo, para obtener (3.54) es suficiente que*

$$\rho_n^{(1)} \leq \psi_n = \frac{\Theta(n,n,\nu,\delta_n)\delta_n^{2n}}{n(1+M)^n}.$$

Si $\delta_n < 1+M$, *para* n *grande, entonces* $\text{lím}_n\,\psi_n = 0$ *debido a que la sucesión* $\Theta_n = \Theta(n,n,\nu,\delta_n)$ *está acotada.*

Para $n = m$ *tenemos de (3.42) que*

$$d(n,\nu) = 4n\delta_n^{-2n}\|W\|_{1,X}(1+M)^n\Theta(n,n,\nu,\delta_n)^{-1}.$$

Sea (k_n) *una sucesión cualquiera tal que* $0 < k_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, *y* $\lim_n k_n = 0$. *Si definimos* $\rho_n^{(2)} = \psi_n k_n$ *entonces la condición (3.55) se verifica.*

Definamos a $\rho_n^{(3)}$ *de modo que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se satisfaga*

$$\omega(W, \rho_n^{(3)}) = \min\left\{\psi_n k_n,\ \textit{diámetro}(W([-1,1]))/2\right\},$$

y por tanto se tenga (3.56) con $\rho_n = \rho_n^{(3)}$.

Ahora es suficiente tomar cualquier sucesión (Y_n), $Y_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, *con* $|Y_n| = \mathcal{O}(\rho_n)$, *siendo*

$$\rho_n = \min\left\{\rho_n^{(i)};\ i = 1,2,3\right\},$$

y aplicar los estimados (3.53) y (3.47). ■

Teorema 3.3.4 *Sea* $f \in H_\nu^\infty[-1,1] \bigcap Lip\ \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. *Existen sucesiones* (δ_n), *y* (ρ_n), $\delta_n > 0$, $\rho_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *tales que para toda sucesión* Y_n, $Y_n \subset X = [-1,1]$, $|Y_n| \leq \rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que*

$$\|f - f_{n,n,\nu,\delta_n,Y_n}\|_{W,X} = \mathcal{O}(\exp(-c_1\sqrt{n})),$$

donde $c_1 = c_1(W, \alpha, \nu, M) > 0$ *no depende de* n *ni de* f.

Demostración *Tal como hicimos en el teorema 3.3.3, tomemos* δ_n *según (3.52), y las sucesiones* $\alpha(n,n,\nu,\delta_n,\rho_n)$ *y* $d(n,n,\nu,\delta_n)$, *teniendo* (ρ_n) *un diseño especial.*

Siguiendo los pasos de la demostración del teorema 3.3.3, podemos construir (ρ_n) *de modo que se tenga*

$$\rho_n = \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{n}))$$

y tal que

- $\alpha(n,\nu) = \mathcal{O}(1)$,
- $d(n,\nu)\rho_n = \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{n})$,
- $d(n,\nu)\omega(W,\rho_n) = \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{n})$,

donde $c_0 > 0$ *es la constante del corolario 3.2.1, y la sucesión* k_n *se escoge de modo que se cumpla*

$$k_n = \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{n})).$$

Del teorema 3.2.1 y su corolario 3.2.1 se tiene que existe una sucesión $f_{n,n,\nu,\delta_n} \in S_{n,n,\nu,\delta_n}$ *tal que*

$$R_{n,n,\nu,\delta_n}(f)_{W,X} \leq \|f - f_{n,n,\nu,\delta_n}\|_{W,X} = \mathcal{O}(\exp(-c_0\sqrt{n})).$$

El estimado (3.41) termina la demostración tomando $c_1 = \min\{1, c_0\}$. ■

Teorema 3.3.5 *Sea $f \in H_{\nu,\epsilon}[-1,1]$, $\epsilon > 0$, con singularidades $a < x_1 < ... < x_\nu < b$. Existen $\delta = \delta(\epsilon, x_1, ..., x_\nu) > 0$ y una sucesión (ρ_n), $\rho_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tales que para toda sucesión Y_n, $Y_n \subset X = [-1,1]$, $|Y_n| \leq \rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\|f - f_{n,n,\nu,\delta,Y_n}\|_{1,X} = \mathcal{O}(\exp(-c_2\, n)),$$

donde $c_2 = c_2(x_1, ..., x_\nu, \epsilon) > 0$.

Demostración *Con la misma técnica que fueron demostrados los teoremas (3.3.3) y (3.3.4), se demuestra este teorema que puede ser considerado un corolario del teorema (3.2.2) y del estimado (3.41). A diferencia de los teoremas (3.3.3) y (3.3.4), si $f \in H_{\nu,\epsilon}[-1,1]$, $\epsilon > 0$, puede tomarse $\delta_n = \delta$, para cierto $\delta > 0$ suficientemente pequeño. En efecto*

$$M(n, j, t_{k,\epsilon}) \leq (4 - 3\exp(-t_{k,\epsilon}))\exp(t_{k,\epsilon}) = M'(k, \epsilon).$$

Luego

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{k=0,\ldots,\nu} \min\left\{(l_k + \epsilon_1)G(k,\epsilon), (l_k + \epsilon_1)\right\} < \delta_n, \tag{3.57}$$

donde

$$G(k,\epsilon) = \left(\frac{1 - \exp(-t_{k,\epsilon})/2}{1 - \exp(-t_{k,\epsilon})}\right)\left(\frac{M'(k,\epsilon) + 1}{M'(k,\epsilon) - 1}\right) - 1.$$

La condición (3.26) tomando al número δ como en (3.57), es satisfecha para la sucesión $(f_{n,\nu,\epsilon})$ construida en la demostración del teorema 3.2.2. Por consiguiente

$$R_{n,n,\nu,\delta}(f)_{1,X} \leq \|f - f_{n,\nu,\epsilon}\|_{1,X} = \mathcal{O}(\exp(-d\, n)),$$

donde $d > 0$ está dado por ([129], teorema 2), y $f_{n,\nu,\epsilon} \in S_{n,\nu,\delta}$.

Sea ahora $K > 0$ el diámetro del conjunto $f([-1,1])$, y sea $e^{-c} = K/2$. Definamos

$$\rho_n = \min\{e^{-nc}\Theta(n,\nu,\delta)\delta^{2n}n^{-1}(1+M)^{-n}, \rho'_n, e^{-nc}\}.$$

El estimado (3.47), considerando $W \equiv 1$, termina la demostración. ∎

3.3.3. Comportamiento asintótico de los nodos óptimos

Teniendo una solución óptima del problema de aproximación racional a tramos, una nueva cuestión surge sobre si los nodos del aproximante óptimo $f_{n,\nu,\delta,Y} = f_{n,n,\nu,\delta,Y}$, de la función f, tienden a las singularidades de f cuando $n \to \infty$. Un ejemplo interesante está dado por la función $f(x) = |x|$, $|x| \leq 1$, cuando es aproximada por una sucesión de mejores aproximantes

$f_{n,1,\delta,Y_n} \in S_{n,n,1,\delta}$, y $|Y_n|$ tiende a cero geométricamente cuando $n \to \infty$. La siguiente proposición tiene lugar.

Proposición 3.3.5 *Sea (Y_n) una sucesión de partes de X tal que $|Y_n| = \mathcal{O}(\rho_n)$. Sea $\tau_{n,1}$ un nodo óptimo de un mejor aproximante $f_{n,1,\delta,Y_n}$ a la función $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, y $0 < \delta < \frac{1}{3}$. Sean $\alpha(n,\nu) = \alpha(n,n,\nu,\delta_n,\rho_n)$ y $d(n,\nu) = d(n,n,\nu,\delta_n)$, dados por (3.40) y (3.42) respectivamente. Si (ρ_n) es tal que*

- $\rho_n = \mathcal{O}(e^{-c_0\, n})$,
- $\alpha(n,\nu) = \mathcal{O}(1)$,
- $\lim_n d(n,\nu)\, \rho_n = \mathcal{O}(e^{-c_0\, n})$,
- $\lim_n d(n,\nu)\, \omega(W,\rho_n) = \mathcal{O}(e^{-c_0\, n})$.

Entonces la sucesión $(\tau_{n,1})$ converge a cero suponiendo que $0 < \kappa < W(x)$, $x \in [-\eta,\eta]$, Para algún η, $0 < \eta < 1$.

Demostración *La demostración la basamos en el hecho de que la enésima mejor aproximación racional a $|x|$, $x \in [-\eta,\eta]$, tiene exactamente el orden $\mathcal{O}(\exp(-\pi\sqrt{n}))$, Para cada η, $0 < \eta < 1$, y $|x| \in H_{1,\epsilon}[-1,1]$, Para cada $\epsilon > 0$.*

Sea $(\tau_{n,1})_{n\in J}$ una subsucesión convergente con límite $x_1 \neq 0$. De este modo, para $0 < \eta < |x_1|/2$ y n grande, $\tau_{n,1} \notin [-\eta,\eta]$, $n \in J$.

Siguiendo la línea de demostración de los teoremas 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5 obtenemos que

$$\kappa\, \mathcal{R}_n(|x|,[-\eta,\eta])_\infty \leq \|f_{n,\nu,\delta,Y_n}(\cdot) - |\cdot|\,\|_{W,X} \leq C\exp(-c_1 n), \quad c_1 > 0,$$

$n \in J$, lo cual es imposible. Por tanto $x_1 = 0$. ■

La proposición 3.3.5 constituye un caso especial de la siguiente.

Proposición 3.3.6 *Sea $f \in C(X)$ y supongamos que existen (δ_n) y (Y_n) tales que $\delta_n > 0$ y $Y_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. Sean f_{n,ν,δ_n,Y_n} una sucesión de elementos de la mejor aproximación a f mediante funciones de S_{n,n,ν,δ_n} respecto a la norma uniforme sobre Y_n, con peso W; y $\mathcal{R}_n(f,[c,d])$ la mejor aproximación uniforme a f, sobre $[c,d]$, mediante funciones racionales de orden no mayor que n.*

Si para $t \in X$ se cumple

$$\limsup_n \frac{\mathcal{R}_n(f,[t-\epsilon,t+\epsilon])}{\|f_{n,\nu,\delta_n,Y_n} - f\|_{W,X}} = +\infty, \tag{3.58}$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y $W(t) > 0$, entonces t es un punto de acumulación de la familia de nodos óptimos.

Demostración *Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y $|W(x)| \geq \kappa$, para $x \in [t-\epsilon, t+\epsilon]$. Si t no es punto de acumulación de los nodos óptimos, se cumple que a partir de cierto n*

$$\kappa \mathcal{R}_n(f, [t-\epsilon, t+\epsilon])_\infty \leq \|f_{n,\nu,\delta_n,Y_n} - f\|_{W,X}. \tag{3.59}$$

Pero (3.59) contradice a (3.58). Concluimos que t es punto de acumulación de los nodos óptimos. ■

Numerosas pruebas numéricas han mostrado que es difícil localizar una singularidad en una región donde el correspondiente valor de la función de peso es cero o demasiado pequeño. Si $W(\xi) \approx 0$, el punto ξ debería ser considerado de antemano como una singularidad de f.

La condición (3.58) debe cumplirse siempre que t sea una singularidad aislada de f, como es el caso de $t = 0$ para la función $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ (proposición 3.3.5). El siguiente resultado tiene como caso particular a la proposición 3.3.5.

Proposición 3.3.7 *Las singularidades de toda función f analítica a tramos (en particular de la clase $H_{\nu,\epsilon}I$), son puntos límite del conjunto de los nodos de los aproximantes discretos óptimos del tipo racional a tramos.*

Demostración *La prueba de este resultado se basa en que hay un anillo $A : 0 < |z - x_k| < \rho$, siendo x_k una de las singularidades de f, donde todo punto está en una trayectoria de prolongación analítica de f, dando lugar a diferentes elementos analíticos según se prolongue desde la derecha o la izquierda de x_k. Es decir, f determina en el anillo A una función multiforme. Según Gonchar [100], teorema 1, la velocidad de aproximación racional es más lenta que la geomérica. La proposición 3.3.6 y el teorema 3.2.2 terminan la demostración.* ■

Si t es un punto de analiticidad de f entonces

$$\mathcal{R}_n(f, [t-\epsilon, t+\epsilon])_\infty = \mathcal{O}(\rho^n),$$

para cierto ρ, $0 < \rho < 1$, y ϵ suficientemente pequeño. Por tanto, la condición (3.58) de la proposición 3.3.6 no tiene que ser cierta.

Introduciendo ligeras modificaciones al desarrollo anterior, la teoría discreta puede ser también deducida para cualquier intervalo real $[a, b]$.

La proposición 3.3.6 puede considerarse como un punto de partida para la obtención de resultados más profundos.

3.4. Resultados experimentales

Esta sección nos muestra los resultados numéricos obtenidos al aplicar el método racional a tramos para aproximar varias funciones con singularidades. Los ejemplos escogidos ilustran la potencia de este método racional en la obtención de información sobre la localización de las singularidades. La primera subsección está dedicada a la aproximación discreta de algunas funciones, mientras que la segunda trata acerca de la solución numérica de un problema de identificación.

3.4.1. Localización de singularidades

Sean f_i, $i = 1, 2, 3$, las siguientes tres funciones que son analíticas salvo en un número finito de puntos del intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ((x-0{,}5)^2+1)\chi_{[0,\,0{,}5]} + \exp(x-0{,}5)\chi_{[0{,}5,\,2]},\\
f_2(x) &= ((x-0{,}5)^2+1)\chi_{[0,\,0{,}5]} + \exp(x-0{,}5)\chi_{[0{,}5,\,1{,}5]} + \exp(1)\chi_{[1{,}5,\,2]},\\
f_3(x) &= ((-0{,}1)^2+1)\chi_{[0,\,0{,}1]} + \chi_{[0{,}1,\,1]} + (\sqrt{x-1}+1)\chi_{[1,\,2]},
\end{aligned}$$

donde χ_A es la función característica o indicadora de un conjunto A, definida como $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, y cero en los demás casos.

Sean W_i, $i = 1, ..., 5$, las siguientes funciones de peso.

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= (x-0{,}5)^4,\\
W_2(x) &= (x-0{,}5)^4+1,\\
W_3(x) &= (x-1)^4,\\
W_4(x) &= (x-1)^4+1,\\
W_5(x) &= x^2+1,
\end{aligned}$$

Algunos resultados numéricos aparecen tabulados en la tabla 3.4.1. En ésta se muestran los valores del error discreto y de los nodos de los mejores aproximantes racionales a tramos de las funciones f_i, sobre conjuntos discretos. Las características del experimento están dadas por:

- Los aproximantes en el caso de la función f_1 tienen piezas del tipo $P_{3,k}/Q_{2,k}$, $k = 1, 2$; $\nu = 1$, con la tolerancia $\delta = 10^{-4}$.

- Para las funciones f_2 and f_3 hemos considerado aproximantes de la clase $S_{2,2,10^{-5}}$.
- En todos los casos el conjunto discreto Y_n está formado por los ceros del polinomio de Chebyshev de grado 25, con respecto al intervalo $[0,2]$.
- El número de nodos de los aproximantes coincide con el número de singularidades interiores de la función aproximada.
- La distribución de las singularidades de la función f_i, de los ceros de la función de peso W_k, y del soporte de la seminorma, pueden influir considerablemente en la precisión de los resultados.

Tabla 3.4.1 Resultados numéricos del error de aproximación y nodos óptimos para varias funciones de peso.

No.	f_i	*Peso* W_i	*Error discreto*	*Nodos óptimos*
1	*1*	*1*	*6.59e-04*	*5.791e-01*
2	*1*	*2*	*6.43e-04*	*5.003e-01*
3	*1*	*3*	*9.51e-04*	*1.001e+00*
4	*1*	*4*	*1.75e-04*	*5.005e-01*
5	*2*	*5*	*1.97e-02*	*5.149e-01 1.509e+00*
6	*3*	*5*	*8.00e-03*	*9.511e-02 9.388e-01*

Notemos que en los ejemplos 1 y 3 las respectivas funciones de peso se anulan en el mismo punto o cerca de la singularidad $x_1 = 0{,}5$. En ambos casos los resultados numéricos muestran que una parte de la información ha sido perdida.

La función f_3 no es analítica a tramos sobre $[0,\ 2]$. Verdaderamente ocurre que f_3, pertenece a la clase de Gonchar-Szabados. Funciones como f_3 pueden ser vistas en [97, 129, 148, 223, 224, 225].

3.4.2. Solución de un problema de identificación

Consideremos un sistema o proceso descrito por el siguiente problema de contorno.

$$-y''(x) + f(x)\,y(x) = F(x),\ \ a \le x \le b, \tag{3.60}$$

$$y(a) = y_a,\ \ y(b) = y_b, \tag{3.61}$$

donde $f \in C[a,b]$, es desconocida, y acerca de la cual sabemos que es analítica sobre $[a,b]$ excepto en un número finito de puntos del intervalo.

Es conocido que para $F \in C[a,b]$, la ecuación (3.60) con las condiciones de contorno (3.61) tiene solución única siempre que el problema homogéneo asociado

$$-y''(x) + f(x)\, y(x) = 0, \;\; a \leq x \leq b, \tag{3.62}$$

$$y(a) = 0, \;\; y(b) = 0, \tag{3.63}$$

tenga soluciones no triviales. Y esto último es cierto si f es positiva.

El propósito de esta subsección consiste en aplicar los resultados del método racional a tramos de la sección 3 para resolver el problema de identificación (1.103) de la página 77, asociado al problema (3.60-3.61). Teniendo en cuenta que los datos son analíticos salvo en algunos puntos, nuestra expectativa es que la solución f sea analítica salvo en algunos puntos.

El conjunto de parámetros mediante el cual se establece la solución de este problema es S_{n,m,ν,δ_n}. La tolerancia δ, que en la teoría produce la compacidad necesaria para garantizar la existencia del mejor aproximante, en el modelo computacional debe ser escogido acorde con la precisión utilizada con el objetivo de producir estabilidad numérica.

Las expectativas de localización de singularidades se basan en la atracción de los polos ejercida por las primeras. El esfuerzo computacional necesario para lograr que los polos ofrezcan información suficiente acerca de las singularidades puede ser muy grande. Una manera de disminuir el coste consiste en usar a los nodos óptimos, gracias a la posición intermedia que éstos ocupan respecto a los polos. Además, tal como puede apreciarse en el teorema 3.3.5 de la sección 3, la tolerancia δ puede escogerse constante.

El objetivo de la técnica de identificación de parámetros consiste en seleccionar o calcular un parámetro $\widetilde{q} \in Q$ (en nuestro caso sería $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta_n}$), de modo que :

1. La solución $y_{n,m,\nu,\delta}$ correspondiente al problema (3.60) con coeficiente $\widetilde{q}$, difiera en un valor mínimo de la solución exacta y, sobre las observaciones $x_1, ..., x_m$.

2. El error $\max_i |-y''(x_i) + \widetilde{q}(x_i)\, y(x_i) - F(x_i)|$ sea mínimo.

El primer criterio es el del error en la solución, y el segundo el correspondiente al error en la ecuación.

Cada observación $u = \{y_1, ..., y_m\}$ de y pertenece a un espacio de observaciones U. Luego, se trata idealmente de encontrar, para cada observación $u \in U$, un parámetro $\widetilde{q} = f_{n,m,\nu,\delta} \in Q = S_{n,m,\nu,\delta_n}$, tal que $y_{n,m,\nu,\delta} = u$. Si llamamos T al operador que actúa como $f_{n,m,\nu,\delta} \to u$, entonces a $T(S_{n,m,\nu,\delta_n}) = R \subset U$ le damos el nombre de conjunto alcanzable o admisible.

El problema (1.103) está generalmente mal planteado. La solución en el conjunto de parámetros puede no existir, debido fundamentalmente a los inevitables errores que se producen durante las mediciones y que pueden producir que $u \notin R$. Incluso, cuando $T(\widetilde{q}) = u$ no podemos asegurar la unicidad y la dependencia continua de u.

Para salvar los diversos obstáculos arriba mencionados, es que planteamos el problema de identificación en términos del siguiente problema de optimización.

$$\mathcal{P}(u) : \min_{q \in Q} \| - u'' + q\, u - F\|. \tag{3.64}$$

El modelo (3.64) se corresponde con el criterio de error en la ecuación, y adopta la forma siguiente al considerar como conjunto de parámetros a $Q = S_{n,m,\nu,\delta_n}$.

$$\mathcal{P}_{n,m,\nu,\delta}(u, Y) : \quad \min \sup_{(x \in Y)} | - u''(x) + f_{n,m,\nu,\delta}(x)\, u(x) - F(x)|, \tag{3.65}$$

sujeto a $f_{n,m,\nu,\delta} \in S_{n,m,\nu,\delta_n}$, siendo $Y \subset [a, b]$.

De la teoría desarrollada en las secciones anteriores se deduce el siguiente

Teorema 3.4.1 *Sean $f \in C[a, b]$ y $u \in C^2[a, b]$ tales que el problema (3.61) se satisface para $y = u$, y $u \neq 0$ Lebesgue casi dondequiera. Sea $Y \subset [a, b]$. Entonces $\mathcal{P}_{n,m,\nu,\delta}(u, Y)$ tiene solución.*

Demostración *La prueba de este teorema se basa en la igualdad (1.104) de la página 78, considerando la seminorma asociada a Y y $W = u$, y en la proposición 3.3.4.* ■

El método numérico que utilizaremos para resolver el problema (3.65) se basa en considerar conjuntos finitos $Y = \{x_1, ..., x_m\}$. Los resultados teóricos como el teorema 3.3.2, establecen expectativas de que este método sea estable al disminuir la densidad del conjunto discreto Y.

Para valorar la efectividad de este método supongamos que la función de fuerzas F es la siguiente

$$F(x) = -2\chi_{[0,1]} + (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)\chi_{[1,2]},$$

el parámetro desconocido es

$$f(x) = (x - 1)\chi_{[1,2]},$$

y la función de ondas está dada por

$$y(x) = (x^2 + 1)\chi_{[0,1]} + ((x - 1)^2 + 2)\chi_{[1,2]}.$$

Consideremos cuatro subcasos, en cada uno de los cuales la observación $u = y(1+\rho)$ ha resultado de producir diferentes perturbaciones a la función de ondas y. En todos los subcasos se ha tomado la distribución discreta Y como los ceros del polinomio de Chebyshev cuyo grado d se señala en cada caso en la tabla 3.4.2, donde también se indican las intensidades respectivas de las perturbaciones.

Los resultados correspondientes a la seminorma mínima y a la estimación del nodo óptimo pueden verse en la tabla 3.4.3.

Tabla 3.4.2 Perturbación ρ y cardinal del conjunto discreto Y.

Caso	ρ	$d =$*card*(Y)
1	*1.0e-01*	*25*
2	*1.0e-02*	*25*
3	*1.0e-01*	*25*
4	*1.0e-01*	*20*

Tabla 3.4.3 Error discreto, nodos óptimos y tipo de aproximantes.

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*	*Caso 4*
Nodo óptimo	*8.698451e-01*	*1.008170e+00*	*1.000429e+00*	*9.994154e-01*
Error discreto	*2.243949e-02*	*5.078990e -03*	*5.536745e -04*	*1.802365e-03*
Parámetros	$S_{2,2,1,1,0e-03}$	$S_{3,2,1,1,0e-03}$	$S_{3,2,1,1,0e-03}$	$S_{3,2,1,1,0e-03}$

Los cálculos que aparecen en las tablas 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.3 fueron realizados en simple precisión, en una PC Acer Power 386SX, utilizando rutinas para optimización no lineal programadas en FORTRAN 77.

Capítulo 4

Aproximación racional e integración numérica.

El núcleo de Cauchy es un puente natural que une a las cuadraturas gaussianas con los aproximantes clásicos de Padé. Gauss [89] fue presuntamente uno de los primeros en utilizar la transformada de Cauchy. Lo hizo para hallar los nodos que garantizan la mayor exactitud posible de una fórmula de cuadratura numérica. Como consecuencia de sus investigaciones, este matemático nacido en el siglo XVIII fue uno de los primeros en establecer vínculos entre los polinomios ortogonales, la integración aproximada y las funciones racionales.

Este capítulo está dividido en dos secciones, y su objetivo global es el estudio de la conexión existente entre la convergencia de las cuadraturas numéricas y la aproximación racional de transformadas de Cauchy. En la sección 4.1 se trata el tema de la integración respecto a medidas variantes. En particular se estudia un tipo de fórmula interpolatoria de grado máximo de exactitud, utilizada por Gonchar y López Lagomasino al investigar la aproximación multipuntual de Padé a transformadas de Cauchy. La sección 4.2 está dedicada a la aproximación de funciones analíticas sobre regiones del plano complejo, y en ella se demuestra que existe un espacio barrilado $\mathcal{B}$ tal que toda función analítica en $|z| > 1$, que se anula en el infinito, es la transformada de Cauchy de un funcional lineal y continuo en $\mathcal{B}$. Como consecuencia, se muestra el carácter dual de dos temas diferentes: la aproximación racional de funciones analíticas, un problema esencialmente no lineal, y la convergencia débil de funcionales lineales.

4.1. Fórmulas de cuadratura y medidas variantes

Durante la década de los años 80 fueron publicados importantes resultados sobre las relaciones que existen entre la convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé y el comportamiento asintótico de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes [154, 156]. Estos aproximantes de interpolación que extienden al clásico aproximante de Padé, han sido técnicamente utilizados para obtener diversos resultados dentro de la aproximación racional [103, 106]. La contribución de Gonchar y López Lagomasino [104] tuvo especial influencia en la aparición de las cuadraturas de tipo racional y la integración numérica respecto a medidas variantes. Esta última surgió vinculada a la aproximación multipuntual de Padé de funciones de tipo Markov, y define la dirección que hemos seguido en esta parte. Aquellos que lean este capítulo, deben apreciar las conexiones que existen entre la teoría de esta sección y los métodos interpolatorios de integración racional estudiados en la sección 2.3.

Durante los últimos diez años del siglo XX, han aparecido nuevos resultados sobre la relación existente entre la aproximación de tipo Padé y las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss extendido. Asimismo, se ha enriquecido la teoría de las fórmulas de cuadratura racional. En la sección 1.2 hemos mencionado algunos de los principales resultados publicados sobre este tema. Esta sección 4.1 tiene el objetivo de presentar al lector estudioso, algunas de las ideas y resultados que han precedido a los actuales desarrollos teóricos de la integración numérica respecto a medidas variantes, y sus relaciones con la aproximación racional de funciones analíticas. Esta parte de la monografía es consecuencia del trabajo conjunto de investigación, realizado por G. López Lagomasino y el autor entre 1979 y 1987 [119, 120, 121, 123].

4.1.1. Preliminares.

En la literatura se mencionan dos estrategias fundamentales para la aproximación del funcional lineal

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x). \tag{4.1}$$

Uno de los planteamientos estratégicos de solución se basa en la selección de una sucesión adecuada (f_n), que aproxime a f cuando n tiende a infinito en algún sentido generalmente más débil[1] que el dado por la norma uniforme, de modo que

$$\lim_n L(f_n) = L(f).$$

El planteamiento alternativo consiste en modelar al aproximante de $L(f)$ como una sucesión de funcionales lineales (L_n), que cumpla ser puntualmente convergente a L sobre una cierta subclase de funciones integrables respecto al integrador α.

Hay fórmulas de cuadratura para las cuales ambas estrategias coinciden. Este es el caso de las fórmulas interpolatorias (1.78).

La utilidad práctica de cualquier aproximante depende de su computabilidad. Las cuadraturas numéricas de interpolación tienen algunas ventajas en este sentido, especialmente en el cálculo de los coeficientes λ_k.

El planteamiento $L(f) \approx L_n(f)$ es típico en el espacio de Hardy en el disco unidad. En este trabajo estudiaremos algunos aspectos del mismo, pues está vinculado directamente a la aproximación racional de funciones analíticas.

En lo que sigue usaremos el símbolo μ para denotar indistintamente a una medida finita y positiva sobre la recta real, o a una función monótona creciente, acotada y con infinitos puntos de crecimiento.

Las fórmulas o métodos de integración numérica racionales de tipo Gauss, debieron surgir a finales de la década de los 70, relacionadas con la teoría de la aproximación racional de ciertas clases de funciones analíticas (ver [104, 151]). Estas reglas, tal como sugiere su nombre, son fórmulas de cuadratura de **grado máximo de exactitud**, cuyo principal atributo parece ser su íntima relación con los aproximantes racionales de interpolación de tipo Padé, asociados a funciones de tipo Stieltjes. Expliquemos brevemente esto último.

Empecemos por considerar una medida finita y positiva μ con soporte $S_\mu \subset \mathbb{R}$. Recordemos que si g es una función no decreciente tal que $dg = d\mu$, entonces S_μ coincide con el conjunto de los puntos de crecimiento de g (ver [79]).

[1] Aproximar en un sentido débil a una función f, significa aquí que los aproximantes para ser construidos requieren poca información acerca de f.

Supongamos que S_μ es un conjunto infinito con envoltura convexa C_μ. Tengamos en cuenta dos casos:

1. $S_\mu \subset I = [a,b],\ -\infty < a < b < +\infty.$
2. $S_\mu \subset I = [0,+\infty).$

La función
$$\widehat{\mu}(z) = \int_I \frac{d\mu(x)}{z-x},$$
es holomorfa en el complemento de C_μ, y recibe los nombres de función de tipo Markov o Stieltjes, según se trate del primero o el segundo caso, respectivamente.[2] También a $\widehat{\mu}$ se le llama integral de tipo Cauchy, transformada de tipo Cauchy de la medida μ, etc. Observemos también que $\widehat{\mu}(z) = \mu * (1/z)$.

Muchas funciones importantes de la matemática pueden representarse en la forma de una cierta transformada $\widehat{\mu}$. Por ejemplo, citemos a las logarítmicas, las series de Borel, y las soluciones de problemas de contorno.[3]

Sea ahora $\alpha = \{\alpha_{n,k};\ k = 1,...,2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una tabla de puntos del plano ampliado[4], situada en el complemento de C_μ, y tal que los polinomios
$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,k}}\right),$$
sean positivos para todo $x \in C_\mu$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una fracción racional
$$[n/n]_\alpha = [n/n]_{\mu,\alpha},$$
de orden n, y tal que la función
$$\left(\frac{\widehat{\mu} - [n/n]_\alpha}{\omega_n}\right),$$
es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash C_\mu$, y tiene un cierto desarrollo formal en $z = \infty$ que le caracteriza (ver [104, 119]).

Esta sucesión de funciones racionales $([n/n]_\alpha)$ interpola a la función $\widehat{\mu}$ en los puntos de la correspondiente fila enésima $(\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, ..., \alpha_{n,2n})$ de la tabla α, tiene como caso particular a los aproximantes clásicos de Padé cuando $\alpha = \{\infty\}$.

Para obtener más detalles acerca del desarrollo y utilización de estos aproximantes pueden consultarse [63, 104, 151].

Sea n un número natural fijo e I un intervalo que contiene al soporte de

[2]Stieltjes fue el primero en estudiar la convergencia de las cuadraturas gaussianas sobre intervalos no acotados.
[3]Las series de Borel desempeñan un rol esencial en la segunda parte de este capítulo.
[4]Los términos de α que sean el punto del infinito, tienen por definición inverso cero

la medida μ. Es conocido que el correspondiente aproximante multipuntual de Padé asociado a $\widehat{\mu}$, tiene exactamente n polos simples pertenecientes al intervalo I. Además, estos puntos singulares coinciden con los ceros del enésimo polinomio ortogonal $Q_n = Q_{n,n}$, asociado a la medida variante $d\mu_n$ definida por[5]

$$d\mu_n = \frac{d\mu}{\omega_n}. \tag{4.2}$$

Si descomponemos a $[n/n]_\alpha$ en suma de fracciones simples

$$[n/n]_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_{n,k}}{z - x_{n,k}},$$

y con estos coeficientes $(\theta_{n,k})$, y los polos $(x_{n,k})$, construimos el funcional S_n, definido por

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{n,k} f(x_{n,k}), \tag{4.3}$$

ocurre entonces que

$$S_n\left(\frac{P}{\omega_n}\right) = \int_I \frac{P}{\omega_n}\mu,$$

para cualquier polinomio P, cuyo grado sea menor o igual a $2n-1$.

Dicho en otros términos. Para cada aproximante multipuntual de Padé $[n/n]_\alpha$, asociado a la tabla α, existe en correspondencia una fórmula de cuadratura numérica de la forma siguiente

$$E_n(f) = \int_I f\, d\mu \;-\; S_n(f), \tag{4.4}$$

que es exacta sobre cierta clase de funciones racionales con polos prefijados.

La fórmula (4.4) ha recibido el nombre de cuadratura numérica racional de tipo Gauss, y cumple la siguiente propiedad:

$$S_n(f_z) = [n/n]_\alpha(z),$$

donde f_z es el núcleo de Cauchy $f_z(x) = (z-x)^{-1}$.

Para facilitar la lectura, formularemos de nuevo nuestro objetivo general utilizando la notación recién establecida: "La teoría que estamos presentando en esta sección, constituye un enfoque de la integración numérica sobre intervalos no acotados, que consiste en la obtención de resultados de convergencia puntual de fórmulas de cuadratura S_n, en términos de la convergencia uniforme sobre cada compacto de la sucesión $S_n(f_z)$, y recíprocamente".

[5]Notar que también podemos considerar al enésimo polinomio ortogonal $Q_{n,m}$, respecto a la medida $d\mu_m$.

En cuanto al desarrollo de la sección señalemos que, después de la definición formal de fórmula interpolatoria racional y la demostración de varias proposiciones elementales, procedemos con la demostración de los principales resultados: los teoremas 4.1.4, 4.1.5 y 4.1.6, y el corolario 4.1.1, consecuencia este último del teorema 4.1.4. Estos teoremas mejoraron en su momento resultados anteriores del mismo género, y actualmente nos sirven para ilustrar lo conveniente que resulta aplicar el Análisis Funcional a tan importantes temas.

A lo largo de esta sección usaremos los siguientes símbolos, conceptos y resultados.

1. $U = \mathbb{C}\backslash I$, donde el símbolo I denotará indistinta y únicamente a los intervalos $[0, +\infty)$, $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

2. U' representa a la unión de U con el punto infinito.

3. $f_z(x) = (z - x)^{-1},\ z \in U,\ x \in I.$

4. μ es una medida positiva sobre la σ álgebra boreliana de I, con soporte infinito S_μ.

5. g es una función creciente y acotada en I, con infinitos puntos de crecimiento.

6. b es una medida compleja, de variación finita, sobre la σ álgebra boreliana de I.

7. $g_a(z, s),\ a > 0$, es la función de Green, asociada a la región $U_a = \mathbb{C}\backslash[-a, a]$, con punto singular s.

8. Sean K y L dos conjuntos compactos y disjuntos del plano. El par (K, L) es llamado condensador de placas K y L. Si intercambiamos de lugar las placas K y L, el nuevo par representa al mismo condensador.

9. Sea h la solución del problema de Dirichlet, asociado a la región $R = \mathbb{C}\backslash(L \cup K)$, tal que $h/FrK \equiv 0$ y $h/FrL \equiv 1$ (Fr A denota a la frontera de A). La función h recibe el nombre de medida armónica de R. Sea Γ un contorno arbitrario cerrado y simple de Jordan, que separa a L de K. El número $C = C(L, K)$ definido por

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial n}\, ds,$$

donde $\partial h/\partial n$ es la derivada en la dirección normal a Γ, orientada de K hacia L, recibe el nombre de **capacidad** (de Green) **del condensador**

(L, K). Es fácil ver que dicho valor no depende del contorno escogido con las propiedades indicadas.

10. Sea $\alpha = \{\alpha_{n,k},\ k = 1, ..., 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una tabla contenida en el compacto $K \subset U_a$, $a > 0$, y tal que cada fila $\alpha(n) = \{\alpha_{n,1}, ..., \alpha_{n,2n}\}$ es estable por el complejo conjugado (α es simétrica).
    Decimos que α es extremal con respecto al condensador $(K, [-a, a])$ si

$$\lim_n \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} g_a(z, \alpha_{n,k}) = \frac{h(z)}{C(K, [-a, a])},$$

    uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C} \backslash (K \cup [-a, a])$.
    Sobre la existencia de estas tablas pueden consultarse [9, 242]. Otras definiciones equivalentes aparecen en [104].

4.1.2. Integración sobre intervalos no acotados

Definición 4.1.1 *Decimos que la sucesión de polinomios algebraicos (ω_n) es* **normal** *en el intervalo I si*

1. *grado $\omega_n \leq 2n,\ n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\omega_n(x) > 0,\ x \in I$.*

En lo sucesivo, el símbolo (ω_n) representará una sucesión normal de polinomios en el intervalo I.

Definición 4.1.2 *Sea (j_n) una sucesión de números naturales tal que grado $\omega_n = 2n - j_n$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $I = [0, +\infty)$ y escribamos $j = \sup_n\ j_n \leq +\infty$.*

Decimos que el par $(\mu, (\omega_n))$ es admisible si

$$\int_0^\infty x^m \, d\mu(x) < \infty,$$

para $0 \leq m \leq j - 1$, $m \in \mathbb{N}$, si $j \geq 1$; y además

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1} d\mu(x) < \infty.$$

En la anterior definición admitimos la posibilidad de que μ sea infinita ($j = 0$). Si $j \geq 1$ entonces μ es necesariamente finita.

Notemos también que sólo hemos considerado el caso $I = [0, +\infty)$. Para intervalos acotados asumiremos que μ es finita, y por tanto no necesitaremos tomar tales precauciones.

En lo que sigue está implícito que el par $(\mu, (\omega_n))$ es admisible cuando $I = [0, +\infty)$.

Definición 4.1.3 *Sean las tablas*

$$\Lambda = \{\lambda_{n,k};\ k = 1, ..., n;\ n \in \mathbb{N}\}, \quad X = \{x_{n,k};\ k = 1, ...n;\ n \in \mathbb{N}\},$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *y* $X \subset I$.

El método o regla de integración asociado a las tablas Λ *y* X*, que podremos denotar simplificadamente por* $S(\Lambda, X)$*, consiste en la sucesión de funcionales* (S_n)*, definida por*

$$S_n(f) = S_n(f, \Lambda, X) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}),$$

donde f *es una función cuyo dominio de definición contiene al intervalo* I.

Si en particular $\Lambda \subset]0, +\infty)$*, diremos que* $S(\Lambda, X)$ *es positivo.*

Definición 4.1.4 *Por* $C_{+\infty}$ *denotamos al espacio vectorial normado de las funciones continuas en* $[0, +\infty)$*, tales que el límite de* $f(x)$ *existe y es finito cuando* x *tiende a* $+\infty$*, provisto de la norma uniforme*

$$\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|.$$

Existen diferentes isometrías de $C_{+\infty}$ dentro de C_{∞}, donde este último es el espacio de las funciones continuas en la recta real, tales que en los puntos $+\infty$ y $-\infty$ tienen límites finitos e iguales. C_{∞} **coincide** con $C(\overline{\mathbb{R}_0})$, funciones continuas sobre la compactificación de Alexandrov de la recta real.

A través de estas isometrías se estudia en [120] la completitud en $C_{+\infty}$ de ciertos sistemas numerables asociados al núcleo de Cauchy (ver [1]).

Definición 4.1.5 *Por* $R(g)$ *denotamos al espacio vectorial de las funciones complejas* f *definidas en* $[0, +\infty)$*, integrables Riemann en sentido impropio de primera especie (el infinito es el único punto singular) con respecto al integrador* g *en* $[0, +\infty)$*, y tales que el límite de* $f(x)$ *existe y es finito cuando* x *tiende a* $+\infty$.

Proposición 4.1.1 $C_{+\infty} \subset R(g)$.

Demostración *Siendo dg finita, la prueba es inmediata utilizando la desigualdad*

$$|f(x)| \leq \|f\|.$$

$\blacksquare$

Lema 4.1.1 *Para cada polinomio P y $a > 0$ sea P_a la función racional asociada a P de la siguiente forma:*

$$P_a(x) = P\left(\frac{1}{x+a}\right).$$

Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración positivo en $I = [0, +\infty)$.

Si

$$\lim_n S_n(P_a) = \int_0^\infty P_a\, dg,$$

para todo polinomio P, entonces

$$\lim_n S_n(f) = \int_0^\infty f\, dg, \tag{4.5}$$

para toda $f \in R(g)$.

Demostración *Sea la fracción $t(x)$ definida por*

$$t(x) = \frac{1}{x+a},$$

y sea $f \in R(g)$. Definamos

$$h(x) = \begin{cases} f \circ t^{-1}(x) & si \;\; 0 < x \leq 1/a \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f \circ t^{-1}(x) & si \qquad x = 0. \end{cases}$$

La función h es integrable Riemann con respecto a $g \circ t^{-1}$ en el intervalo $[0, 1/a]$ y además

$$\int_0^{1/a} h\, d(g \circ t^{-1}) = -\int_0^{+\infty} f\, dg.$$

Por otra parte, si P es un polinomio tenemos que $P_a \in C_{+\infty}$,

$$\int_0^{1/a} P\, d(g \circ t^{-1}) = -\int_0^{+\infty} P_a\, dg,$$

y $S_n(P_a, \Lambda, X) = S_n(P, \Lambda, X')$, donde

$$X' = \left\{\frac{1}{x+a};\; x \in X\right\} \subset [0, 1/a].$$

Lo anterior nos permite afirmar que

$$\lim_n S_n(P, \Lambda', X') = \int_0^{1/a} P\, d(g \circ t^{-1}),$$

donde $\Lambda' = -\Lambda$, *para todo polinomio* P. *El teorema clásico de Steklov-Fejer [228], afirma en tal situación que*

$$\lim_n S_n(h, \Lambda', X') = \int_0^{1/a} h\, d(g \circ t^{-1}),$$

es decir (4.5). ■

Señalemos que el teorema de Steklov-Fejer establece que, si un método de integración positivo $S(\Lambda, X)$, $X \subset [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, evaluado en cualquier polinomio P converge a $\int_a^b P\, dg$, entonces ello también ocurre para toda función integrable Riemann con respecto a g en el intervalo $[a, b]$. La demostración de este resultado se basa en la posibilidad de aproximar unilateralmente por medio de polinomios, en la métrica de L^1, a toda función integrable.

En intervalos no acotados, cuando todos los momentos del integrador g son finitos, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} x^m\, dg(x) < \infty, \quad m = 0, 1, 2, ...;$$

la aproximación unilateral polinómica en L^1, no siempre es posible para cualquier función Riemann-Stieltjes integrable, aún cuando su módulo no crezca en el infinito más rápido que un polinomio. En Freud [79] se trata este problema, haciendo depender su solución de la determinación del problema de momentos asociado al integrador dg.

El tipo de función que aquí consideramos permite soslayar aquellas dificultades que naturalmente aportaría un integrador cuyos momentos no son todos finitos.

4.1.3. Caracterización de la convergencia de cuadraturas

Teorema 4.1.1 *Sea* $S(\Lambda, X)$ *un método de integración tal que* $X \subset [0, +\infty) = I$. *Tenemos que*

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^{+\infty} f\, db, \tag{4.6}$$

para toda $f \in C_{+\infty}$, *si y solo si*

$$r_n(z) = S_n(f_z, \Lambda, X) \to \hat{b}(z) = \int_0^{+\infty} f_z\, db, \tag{4.7}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U,

$$S_n(1, \Lambda, X) \to b([0, +\infty)), \tag{4.8}$$

y

$$\sup_n \sup_{\|f\| \leq 1} |S_n(f, \Lambda, X)| < \infty, \tag{4.9}$$

donde el supremo en (4.9) se toma respecto al espacio $C_{+\infty}$.

Demostración *El espacio $(C_{+\infty}, \|.\|)$ es de Banach, y los funcionales*

$$S_n(., \Lambda, X), \;\; n \in \mathbb{N}; \;\; \int_0^\infty (.)\, db,$$

son lineales y continuos. El teorema de Banach-Steinhauss[6] asegura que se cumple (4.9) bajo la condición (4.6).

La convergencia puntual de las fracciones r_n, $n \in \mathbb{N}$, para $z \in U$, y (4.8), son consecuencia de (4.6), al tomar $f \equiv 1$, $f \equiv f_z \in C_{+\infty}$, $z \in U$.

Para obtener (4.7) basta demostrar que (r_n) es una familia normal en U. Para ello tomemos un conjunto compacto cualquiera $K \subset U$. Para cualquier $z \in K$ tenemos que

$$|r_n(z)| \leq \sup_n \|S_n\| \, \|f_z\| \leq \frac{\sup_n \|S_n\|}{d([0, +\infty), K)}.$$

El recíproco es consecuencia de aplicar el teorema de Banach a la sucesión de funcionales (S_n), que está uniformemente acotada en virtud de (4.9), y a la familia de funciones $F_1 = \{1, f_z; \; z \in U\}$, cuya envoltura lineal es densa en $C_{+\infty}$ (ver [1, 120]). ■

Si la condición (4.6) la cambiamos expresando que sólo es cierta para todo $f \in C^0_{+\infty} = \{f \in C_{+\infty} / \; f(+\infty) = 0\}$, entonces ésta resulta equivalente a (4.7) y a (4.9). La modificación que tenemos que hacer a (4.9) consiste en asumir supremo sobre el subespacio $C^0_{+\infty}$. En tal caso la condición (4.8) no tendría lugar.

El teorema 4.1.1 no sólo generaliza al lema 4.1 de [215], sino que además muestra el verdadero papel de las funciones racionales $S_n(f_z)$ como contraparte de los funcionales S_n.

Teorema 4.1.2 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración con $X \subset [a, b]$.*

Para que

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_a^b f\, db, \tag{4.10}$$

[6] También es conocido como el principio de acotación uniforme

para toda $f \in C([a,b])$, es necesario y suficiente que

$$r_n(z) = S_n(f_z, \Lambda, X) \to \hat{b}(z) = \int_a^b f_z \, db, \tag{4.11}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U, y

$$\sup_n \|S_n\| < \infty. \tag{4.12}$$

Demostración *Debido a que $F = \{f_z;\ z \in U\}$ tiene envoltura lineal densa en $C([a,b])$, es posible demostrar este teorema utilizando la misma técnica del teorema 4.1.1.* ■

Los métodos de integración numérica positivos tienen particular importancia tanto en la teoría como en el cálculo numérico. Se trata de funcionales monótonos y por ende continuos. Además, basta que sean exactos sobre las constantes para que cualquier sucesión de los mismos esté uniformemente acotada. En Freud [79] se trata exclusivamente el caso de cuadraturas positivas y exactas en el límite sobre la clase de los polinomios. El siguiente resultado es una versión para funciones integrables en la semirrecta y continuas en el infinito.(7

Teorema 4.1.3 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración positivo sobre $I = [0, +\infty)$. La condición*

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^\infty f \, dg, \tag{4.13}$$

para toda $f \in R(g)$, es necesaria y suficiente para que

$$S_n(f_z) \to \int_0^\infty f_z \, dg, \tag{4.14}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U, y

$$S_n(1) \to g(+\infty) - g(0). \tag{4.15}$$

Demostración *La condición (4.15) y la positividad de los funcionales S_n, $n \in \mathbb{N}$, garantizan la validez de (4.8) y (4.9), lo que junto a (4.14), implican (4.13) para $f \in C_{+\infty}$ (Teorema 4.1.1).*

Como $P_a \in C_{+\infty}$, cualquiera sea el polinomio P y $a > 0$, el lema 4.1.1 prueba que (4.13) es cierto.

Recíprocamente, si (4.13) es cierto para todo $f \in R(g)$, lo cumple en particular para $f \in C_{+\infty}$ (proposición 4.1.1). Del teorema 4.1.1 deducimos (4.14) y (4.15). El teorema está demostrado. ■

[7] Admiten prolongación continua en el infinito.

4.1.4. Cuadraturas racionales sobre intervalos no acotados

La siguiente definición de cuadratura racional interpolatoria intenta abarcar aquellos casos no contemplados en la definición del subepígrafe 2.3.2. A saber, se tratan de incluir a las medidas que no son finitas o cuyos momentos clásicos no son finitos, y a las integrales definidas sobre intervalos no acotados.

Definición 4.1.6 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración. Sea (r_n) una sucesión de números naturales tal que*

$$0 \leq r_n \leq grado[\omega_n] + j - 1, \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Decimos que $S(\Lambda, X)$ es una regla racional e interpolatoria de integración, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, con orden de exactitud (r_n), si para cualquier natural n y cualquier polinomio P de grado $\leq r_n$, se cumple

$$\int_I \frac{P}{\omega_n} \, d\mu \; = \; S_n \left(\frac{P}{\omega_n}, \Lambda, X \right). \tag{4.17}$$

Si $I = [0, +\infty)$, la condición impuesta al grado de P y (4.16) garantizan que (4.17) tenga sentido.

Si $\omega_n \equiv 1, \; n \in \mathbb{N}$, entonces $j = \infty$ y por tanto

$$\int_0^\infty x^n \, d\mu(x) < \infty,$$

para todo n. De esta forma apreciamos que la definición 4.1.6 contiene al planteamiento tradicional de cuadraturas interpolatorias.

La anterior condición (4.17) expresa que estas fórmulas son exactas sobre ciertos espacios lineales de funciones racionales con polos prefijados.[8]

Otro enfoque de (4.17) y (2.58), consiste en considerar a estas cuadraturas como fórmulas polinomiales con respecto a pesos racionales variantes, ya definidos por (2.50) en la página 168.

Definición 4.1.7 *Sea $\alpha = \{\alpha_{n,k}; \; k = 1, ..., 2n; \, n \in \mathbb{N}\}$ una tabla contenida en U'. Decimos que la sucesión (ω_n) está asociada a la tabla α si*

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n,k}} \right). \tag{4.18}$$

En la expresión (4.18) entendemos que si un elemento $\alpha_{n,k}$ es infinito, el correspondiente factor es idénticamente uno.

El artículo de Gonchar-López [104] ha sido uno de los primeros en introducir las tablas de interpolación por medio de la representación (4.18).

[8] Análogamente ocurre con la condición (2.58), dada en la página 110.

Teorema 4.1.4 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método interpolatorio y positivo de integración, relativo al par $(g, (\omega_n))$, con orden de exactitud (r_n), donde (ω_n) está asociado a la tabla Newtoniana e infinita $\alpha = \{\alpha_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, $\alpha \subset U'$ y $X \subset [0, +\infty) = I$.*

Si además se cumplen las siguientes condiciones.

$$\alpha_n \neq \alpha_m, \tag{4.19}$$

para $\alpha_n,\ \alpha_m$ números, y $n \neq m$.

$$\lim_n S_n(1, \Lambda, X) = g(+\infty) - g(0), \tag{4.20}$$

$$r_n \geq grado\,[\omega_n] - 1, \tag{4.21}$$

$$\sum_{\mathbf{Im}\sqrt{\alpha_n} > 0} \frac{\mathbf{Im}\sqrt{\alpha_n}}{1 + |\alpha_n|} = \infty, \tag{4.22}$$

entonces

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^{+\infty} f\, dg,$$

para toda $f \in R(g)$.

Demostración *Las condiciones (4.19) y (4.22) son suficientes para que el sistema*

$$\left\{1, \left(1 - x\alpha_k^{-1}\right)^{-1};\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

tenga envoltura lineal densa en $C_{+\infty}$ (ver lema 1 de [120]).

Sean k y n dos números naturales tales que $2n > k$ y $\alpha_k \in \mathbb{R}$. de (4.21) tenemos que el polinomio

$$P(x) = \frac{\omega_n(x)}{1 - x\alpha_k^{-1}},$$

tiene grado menor o igual que r_n. Por tanto de (4.17) tenemos

$$S_n\left(\frac{1}{1 - x\alpha_k^{-1}}, \Lambda, X\right) = \int_0^{\infty} \frac{dg(x)}{1 - x\alpha_k^{-1}},$$

lo que unido a (4.21) y el teorema de Banach, prueban que

$$\lim_n\ S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^{\infty}\ f\ dg,$$

para toda $f \in C_{+\infty}$.

El lema 4.1.1 termina la demostración. ■

Si *grado* $[\omega_n] \leq r_n,\ n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple (4.20) automáticamente. Para verlo basta tomar $P = \omega_n$ en (4.17). Observemos que en tal caso necesariamente $j \geq 1$.

El teorema 4.1.4 tiene como casos particulares a los teoremas 1 y 2 de [120].

4.1.5. Cuadraturas racionales y aproximantes de Padé

Definición 4.1.8 *Decimos que $S(\Lambda, X)$ es una regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, si $S(\Lambda, X)$ es racional de interpolación con orden de exactitud $r_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Al igual que en el caso clásico, $2n - 1$ es el máximo valor posible de r_n. Es decir, las reglas racionales de tipo Gauss, son cuadraturas de grado máximo de exactitud.

Proposición 4.1.2 *$S(\Lambda, X)$ es una regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, si y solo si $\{x_{n,k};\ k = 1, ..., n;\ n \in \mathbb{N}\}$ son los ceros (simples) del enésimo polinomio ortogonal q_n, asociado a la medida $d\mu_n = \omega_n^{-1} d\mu$, y*

$$\lambda_{n,k} = \int_0^\infty \frac{q_n^2(x)\,\omega_n(x_{n,k})}{\left(q_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})\right)^2 \omega_n(x)} d\mu(x) > 0, \tag{4.23}$$

$k = 1, ...n$; $n \in \mathbb{N}$, donde

$$q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{n,k}).$$

Demostración *Sea $S(\Lambda, X)$ una regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$. De (4.17) deducimos que*

$$\int_0^\infty \frac{P_k(x)}{\omega_n(x)} d\mu(x) = \frac{P_k(x_{n,k})\lambda_{n,k}}{\omega_n(x_{n,k})}, \tag{4.24}$$

donde

$$P_k(x) = \prod_{i=1,\, i \neq k}^{n} (x - x_{n,i})^2.$$

De (4.24) obtenemos (4.23).

Si $0 \leq m \leq n - 1$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{q_n(x)\, x^m}{\omega_n(x)} d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k} q_n(x_{n,k})\, x_{n,k}^m}{\omega_n(x_{n,k})} = 0,$$

pues grado $q_n(x)x^m \leq 2n - 1$, y $q_n(x_{n,k}) = 0$, $k = 1, ..., n$; lo cual significa que q_n es el enésimo polinomio mónico ortogonal relativo a la medida $d\mu_n$. El recíproco lo obtenemos por medio de la división euclideana. En efecto, si grado $p_n \leq 2n - 1$, entonces existen polinomios c_n y r_n tales que grado $c_n < n$, grado $r_n < n$, y

$$p_n = q_n\, c_n + r_n. \tag{4.25}$$

Luego

$$\int_0^\infty \frac{p_n}{\omega_n} d\mu = \int_0^\infty \frac{q_n\, c_n}{\omega_n} d\mu + \int_0^\infty \frac{r_n}{\omega_n} d\mu.$$

De (4.25) también tenemos que $p_n(x_{n,k}) = r_n(x_{n,k}),\ k = 1, ..., n.$

De la fórmula de interpolación de Lagrange y la ortogonalidad de q_n*, deducimos que*

$$\int_0^\infty \frac{p_n}{\omega_n} d\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}\, r_n(x_{n,k})}{\omega_n(x_{n,k})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}\, p_n(x_{n,k})}{\omega_n(x_{n,k})},$$

lo que termina la demostración. ■

Esta proposición 4.1.2 que en el caso clásico es bien conocida, ha sido considerada parcialmente en el contenido de los artículos [104], [120]-[151].

Al igual que en el teorema 4, capítulo 4 de [63], es posible probar que si $S(\Lambda, X)$ es de interpolación relativa al par $(\mu, (\omega_n))$ con orden (r_n) de exactitud, $r_n < n,\ n \in \mathbb{N}$, tenemos que $S(\Lambda, X)$ es de tipo Gauss si y solo si los nodos $x_{n,k}$ son los ceros del enésimo polinomio ortogonal asociado a $d\mu_n$.

Las fórmulas de cuadratura interpolatorias, simples y de orden n, alcanzan un orden de exactitud mínimo $r_n = n-1$, de modo que en general $n-1 \leq r_n \leq 2n-1$.

La forma dada a la proposición 4.1.2, algo diferente al teorema 4, capítulo 4 de [63], se justifica por cuanto no habíamos esclarecido previamente qué forma tienen los coeficientes interpolatorios $\lambda_{n,k}$.

El siguiente corolario del teorema 4.1.4 está anunciado en [120].

Corolario 4.1.1 *Sea* $\alpha = \{\alpha_k;\ k \in \mathbb{N}\} \subset U'$*, y tal que cada fila*

$$\alpha_n = \{\alpha_1, ..., \alpha_{2n-1}\},$$

es estable por el complejo conjugado (α es simétrica). Sea $([n/n]_\alpha)$ *la diagonal de la tabla de los aproximantes multipuntuales de Padé, asociadas a la función de tipo Stieltjes*

$$\widehat{\mu}(z) = \int_0^\infty f_z\, d\mu,\ z \in U,$$

y a la tabla α que es infinita y satisface las condiciones (4.19) y (4.22).

Entonces

$$\lim_n [n/n]_\alpha(z) = \widehat{\mu}(z),$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U.

Demostración *Sea $S(\Lambda, X)$ la regla racional de tipo Gauss relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, donde (ω_n) está asociada a α según la definición 4.1.7. Entonces $[n/n]_\alpha(z) = S_n(f_z, \Lambda, X)$, $z \in U$ (ver [151]). Aquí tenemos que grado $[\omega_n] \leq 2n - 1$, y por tanto se cumple (4.20) (ver las notas después de la prueba del teorema 4.1.4 en la página 177). Es obvio que la condición (4.21) también se satisface. Del teorema 4.1.4 tenemos que*

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^\infty f\, d\mu,$$

para toda $f \in C_{+\infty}$. Del teorema 4.1.3 obtenemos la tesis del corolario. ■

El corolario 4.1.1 extiende el uso de las tablas Newtonianas de interpolación en teoremas de tipo Stieltjes.

Consideremos por ejemplo a la tabla $\alpha = \{i/k, -i/k;\ k \in \mathbb{N}\}$ donde i es la unidad imaginaria. Esta tabla tiene evidentemente a $z = 0$ como punto de acumulación, y por tanto, su uso no está previsto en el corolario 2 de [151]. Sin embargo, según el corolario 4.1.1, los aproximantes multipuntuales de Padé, asociados a α y a $\widehat{\mu}$, convergen uniformemente a esta última en U.

Para tablas alejadas de $[0, +\infty)$ podemos mejorar las hipótesis del teorema 4.1.4, tal como lo demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4.1.5 *Sea $S(\Lambda, X)$ una regla racional de tipo Gauss con $I = [0, +\infty)$, relativa al par $(g, (\omega_n))$. Si (ω_n) está asociada a la tabla $\alpha \subset [-\infty, -1]$ y además se cumplen las siguientes condiciones.*

$$\lim_n S_n(1, \Lambda, X) = g(+\infty) - g(0), \tag{4.26}$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt[2k]{c_{n,k}}} = \infty, \tag{4.27}$$

donde

$$c_{n,k} = \int_0^\infty \frac{x^k}{\omega_{n,k+1}(x)} dg(x),$$

y

$$\omega_{n,k+1}(x) = \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,i}}\right).$$

Entonces

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^\infty f\, dg,$$

para toda $f \in R(g)$.

Demostración *De (4.27) tenemos la convergencia uniforme sobre cada compacto contenido en U, de las fracciones $S_n(f_z)$, a la función $\int_0^\infty f_z\,dg$ (ver [151]). De (4.26) y el teorema 4.1.3 concluimos la demostración.* ■

La condición (4.27) relativa a los momentos generalizados $c_{n,k}$, fue introducida por G. López Lagomasino en [151], y puede ser interpretada en el teorema 4.1.5 como una versión mejorada de las hipótesis del teorema 1.1 de [79]. Notemos sin embargo, que a diferencia de [79], la tesis del teorema 4.1.5 sólo es válida para $f \in R(g)$, y reglas de tipo Gauss racionales. Señalemos además, que el teorema 4.1.5 mejora al teorema 2 de [120] para este tipo específico de tablas.

4.1.6. Orden de convergencia

El resultado que aquí mostramos, expresa que la velocidad mínima dada por el estimado (2.52) del capítulo 2 (Proposición 2.3.1), es alcanzada para una selección adecuada de los aproximantes S_n. Estos son precisamente los de tipo Gauss racional o Gauss generalizado.

Sean $0 < a < 1$, $1 \le p \le \infty$, y $\alpha \subset T = \{z;\,|z| = 1\}$, una tabla extremal y simétrica. Sea μ una medida con $S_\mu \subset [-a, a]$, tal que la derivada de su componente absolutamente continua es mayor que cero casi dondequiera.

Teorema 4.1.6 *Sea $S(\Lambda, X)$ la regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, donde (ω_n) está asociada a α, y sea*

$$E_{n,a}(H^p) = \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \int_{-a}^{a} f\,d\mu \,-\, S_n(f, \Lambda, X) \right|.$$

Entonces

$$\lim_n E_{n,a}(H^p)^{1/n} = \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right),$$

donde C_a es la capacidad del condensador $(T, [-a, a])$.

Demostración *Al igual que en el corolario 4.1.1 y el teorema 4.1.5, usaremos la relación existente entre cuadraturas racionales del tipo Gauss y los aproximantes multipuntuales de Padé.*

Sea $f \in H^p$. De los teoremas integral de Cauchy y de Fubini obtenemos,

$$\left| \int_{-a}^{a} f\,d\mu \,-\, S_n(f, \Lambda, X) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_T f(s)\left(\widehat{\mu}(s) - [n/n]_\alpha(s)\right) ds \right| \le$$

$$\leq \|f\|_p \|\widehat{\mu} - [n/n]_\alpha\|_T, \tag{4.28}$$

donde $[n/n]_\alpha(z) = S_n(f_z)$ *es igual que en el teorema 4.1.5.*

Por otra parte si $d > 1$,

$$(d-1)\|\widehat{\mu} - [n/n]_\alpha\|_{T_d} \leq E_{n,a}(H^p), \tag{4.29}$$

donde $T_d = \{z;\ |z| = d\}$.

De (4.28) y el teorema 2 de [104] deducimos que

$$\limsup_n E_{n,a}(H^p)^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right). \tag{4.30}$$

Mientras que de (4.29) y el propio teorema 2 de [104] tenemos

$$\exp\left(-\frac{2\sigma_d}{C_a}\right) \leq \liminf_n E_{n,a}(H^p)^{1/n}, \tag{4.31}$$

donde $\sigma_d = \inf\{h(z);\ z \in T_d\}$, *y* $h(z)$ *es la medida armónica de la región*

$$G = \mathbb{C}\backslash\{T \cup [-a,a])\}.$$

Si hacemos tender d hacia uno, de la continuidad y la propia definición de h, tenemos la tesis del teorema uniendo (4.30) y (4.31). ■

Advirtamos que $E_{n,a}(H^p)$ es el error en la clase H^p de un tipo específico de cuadratura, y no el error óptimo.

Superando algunas dificultades, el teorema 4.1.6 puede extenderse al caso general estudiado en [121].

Teniendo en cuenta los resultados que hemos mostrado en esta sección para las fórmulas de cuadratura sobre el intervalo $[0, +\infty)$, la teoría de [120] y el teorema 1.1 del capítulo 3 de [79], parece razonable conjeturar que la convergencia puntual de las reglas de integración deba lograrse cuando existe una "adecuada proporción" entre la velocidad de crecimiento modular de las funciones integradas, y la densidad del integrador en una vecindad del infinito. Sin embargo, clasificar el comportamiento de las funciones en el punto del infinito no es el único modo de abordar el estudio de las reglas de integración sobre $[0, +\infty)$. Un enfoque simétrico, porque también considera al punto $z = 0$, ha sido investigado en los años 90 por Bultheel et al [53, 54, 55, 56], Gustafson [113], López Lagomasino [157], y Thron [230] entre otros.

En [55] se establece la relación entre fórmulas gaussianas respecto a sistemas de polinomios de Laurent (L-cuadraturas), y los aproximantes de Padé en dos puntos, y se prueba la convergencia de las primeras sobre $C_{+\infty}$. En [56], un trabajo posterior de los autores de [55], se extiende la convergencia de las L-cuadraturas a clases más amplias de funciones.

4.2. Caracterización de la convergencia uniforme sobre compactos

En las siguientes páginas es probada la eficacia de los recursos técnicos de la sección 4.1, al considerar fórmulas de cuadraturas sobre espacios de (clases de) funciones analíticas en el disco unidad. El principal objetivo de esta sección es el estudio de la relación existente entre la convergencia uniforme sobre compactos $|z| > 1$, de sucesiones de funciones analíticas, y la convergencia débil en un espacio dual que contiene a las cuadraturas clásicas.

El lector encontrará en esta parte una muestra de cómo actúan los teoremas fuertes del análisis funcional y la variable compleja en la teoría de la aproximación.

4.2.1. Preliminares

Sea H un espacio vectorial topológico cuyos puntos son funciones analíticas en un conjunto abierto del plano o la recta. Una técnica muy utilizada consiste en reducir la comprobación de la convergencia uniforme sobre compactos de una sucesión de funciones (F_n), $F_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, a la demostración de la convergencia débil de ciertos funcionales (S_n) que han sido asociados a (F_n) de una manera plausible. Ejemplos importantes lo constituyen funciones racionales o polinomios F_n sujetos a condiciones de extremalidad, siendo S_n integrales de probabilidad concentradas en los polos de los primeros o en los ceros de los segundos.

Supongamos adicionalmente que $f_z \in H$, $f_z(x) = 1/(z - x)$, $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, $x \in [a, b]$. Nos preguntamos ahora acerca de la relación existente entre la convergencia uniforme sobre cada compacto de $\bar{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, de la sucesión $F_n(z) = S_n(f_z)$, y la convergencia débil de (S_n) respecto al dual topológico de H. Con la técnica usada en la demostración de los teoremas 4.1.1 y 4.1.3, es posible hallar el vínculo entre ambos tipos de convergencia en una amplia gama de casos. La diferencia con la sección 4.1 es que ahora tratamos con funciones que además de ser analíticas en (a, b), en general no son continuas sobre el cerrado $[a, b]$.

Necesitamos que el espacio H sea un espacio de Banach o un espacio vectorial topológico barrilado,(9 para poder utilizar el principio de acotación uniforme según el esquema técnico seguido en la sección 4.1.

En algunos textos, como es el caso de [215], sólo se menciona o se estudia la convergencia puntual de las funciones analíticas (F_n). Observemos que si la familia (F_n) es normal, para obtener convergencia uniforme sobre los compactos basta con garantizar la convergencia puntual sobre una parte A, estrictamente

[9] En algunos países de habla hispana reciben el nombre de *tonelados*.

incluida en $D = \cap \operatorname{dom} F_n$, de modo que ésta tenga algún punto de acumulación en D.[10] En esta parte utilizaremos el esquema técnico utilizado en la sección 4.1 y en [123, 127], basado en teoremas fuertes del análisis funcional y la variable compleja. Recursos técnicos como los empleados en la demostración del teorema 3 de [120] tienen muy pocas perspectivas de ser aplicados en desarrollos ulteriores.

En la primera parte consideramos al espacio normado $H = H^p$ y probamos un resultado con el que caracterizamos a la convergencia puntual de los métodos de integración del siguiente tipo, que ya mencionamos en el capítulo 1 al enunciar el teorema de Andersson.

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f^{(j-1)}(z_i).$$

Estos aproximantes lineales S_n aparecen frecuentemente en la literatura. Ver por ejemplo los siguientes trabajos [28, 29, 35, 111, 121, 145, 149, 150, 174, 233].

El problema inverso al anterior consiste en caracterizar a la convergencia uniforme de sucesiones cualesquiera de funciones racionales que se anulan en el infinito y tienen sus polos en $|z| < 1$, en términos de la convergencia puntual de ciertos métodos de integración definidos sobre un cierto espacio vectorial topológico H. El teorema 4.2.2 expresa que si $H = H^p$, $1 \leq p < \infty$, no es posible obtener un resultado inverso.

Mostrar cómo se resuelve el anterior problema inverso es el principal objetivo de esta sección. De hecho nos planteamos la solución de un problema más amplio: *la caracterización de la convergencia fuerte en un espacio de funciones analíticas, en términos de la convergencia débil en cierto espacio lineal asociado.*[11]

Esta sección trata de completar algunos aspectos teóricos considerados en la anterior sección 4.1, y termina con una breve discusión acerca del orden de convergencia a cero del error de fórmulas generales de cuadratura sobre los espacios H^p, y su relación con la mejor aproximación racional y uniforme a integrales de tipo Cauchy, con el objetivo de ilustrar el uso de estas técnicas y resultados.

Notación *En toda esta parte asumiremos que:*

1. $D = \{z;\ |z| < 1\}$,

2. $D_0 = \{z;\ |z| \leq 1\}$,

3. $T = \{z;\ |z| = 1\}$,

[10] Sobre este resultado pueden consultarse [2] o cualquiera de sus ediciones en español o inglés.
[11] Consultar [126].

4. $U_D = \mathbb{C} \backslash D_0$,
5. $U'_D = U_D + \{\infty\}$,
6. H_0 *es el conjunto de las funciones analíticas en* U'_D, *que se anulan en el infinito,*
7. $H(A)$ *es el conjunto de las funciones analíticas sobre* A, $A \subset \mathbb{C} + \{\infty\}$,
8. (p,q) *es un par de números conjugados, es decir,* $1 \leq p, q \leq \infty$, *y* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

4.2.2. Fórmulas de cuadraturas en H^p

Definición 4.2.1 *Sea* $\mathcal{R}_0$ *el conjunto de las funciones racionales con ceros en el infinito y polos en* D. *Si* $R \in \mathcal{R}_0$ *y* $g \in L^q(T)$, *la siguiente expresión es una fórmula de cuadratura en el espacio* H^p.

$$L_g(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_T f(s)g(s)ds = S_n(f) + E_n(f), \ f \in H^p, \tag{4.32}$$

donde

$$S_n(f) = \int_T f(s)R_n(s)ds,$$

$E_n(f)$ *es el resto o error, y* n *es el orden de la fracción* R_n.

El término "cuadratura"ha sido generalmente utilizado en la literatura para hacer referencia a aquellos métodos de la integración numérica que permiten calcular aproximadamente la integral de funciones de una sola variable. Es por ello que el método (S_n) de la definición 4.2.1 debemos interpretarlo como un aproximante de cuadraturas en sentido amplio. No obstante, esta definición también contiene a la situación clásica unidimensional.

Es conocido que los elementos del dual del espacio H^p, $1 \leq p < \infty$, se caracterizan por la representación[12] (4.32) .

Si μ es una medida finita y positiva en D (posiblemente concentrada en $(-1,1)$) de tipo Carleson, entonces

$$L_\mu(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_D f d\mu,$$

es un funcional lineal y continuo en H^p, $1 \leq p < \infty$.

En particular $d\mu = dx$ es de tipo Carleson.

De este comentario se desprende que (4.32) incluye a las llamadas fórmulas de cubatura. Para verlo basta considerar a $d\mu = 1_S \, dxdy$, donde $S \subset D$, es una región cuya frontera tiene medida Lebesgue cero.

[12] Ver el capítulo 8 de [72] o el teorema 1.1.12 de la sección 1.1.6.

Definición 4.2.2 *Sea $g \in L^q(T)$.La transformada de Cauchy-Stieltjes de g, es por definición la nueva función*

$$\widehat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T g(s) f_z(s) ds,\ z \in U_D.$$

Proposición 4.2.1 *Si $g \in L^q(T)$, entonces $\widehat{g} \in H_0$ y*

$$\widehat{g}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_T \frac{g(s)}{(s-z)^{n+1}} ds,\ n \in \mathbb{N},\ z \in U_D.$$

Demostración *La función paramétrica $h(s,z) = g(s)(s-z)^{-1}$, cumple las hipótesis que permiten aplicar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, lo que justifica que el signo de derivación permuta con el de integral.* ■

Proposición 4.2.2 *Sea $R \in \mathcal{R}_0$. La descomposición de R en suma de fracciones simples podemos escribirla en la siguiente forma*

$$R(z) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{a_{ij} j!}{(z-z_i)^{j+1}},$$

donde $|z_i| < 1,\ i = 1, ..., k$; m_i es la multiplicidad del polo z_i, y $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ es el orden de R.

Además, si $f \in H^1$ entonces

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(s) R(s) ds = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} f^{(j)}(z_i). \tag{4.33}$$

Además, S_n es un funcional lineal y continuo en el espacio H^p, $1 \le p < \infty$, cuya norma es $\|S_n\| = \|R_n(e^{i\theta})e^{i\theta}\|_q$, $1/p + 1/q = 1$.

Demostración *La primera parte relativa a la forma de la descomposición en suma de fracciones simples de una función racional $R \in \mathcal{R}_0$, es evidente.*

Si $f \in H^1$, f puede ser representada como la integral de Cauchy de sus valores en la frontera T, y

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i}\int_T \frac{f(s)}{(s-z)^{j+1}} ds,$$

para $|z| < 1$, lo que junto a la linealidad de la integral prueba la igualdad (4.33).

La última afirmación es consecuencia de [72], capítulo 7, página 112. ■

Teorema 4.2.1 *Sean $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$, $g \in L^q(T)$, $q > 1$. Si L y S son como en (4.32) y (4.33) respectivamente, entonces*

$$\lim_n S_n(f) = L(f), \tag{4.34}$$

para toda $f \in H^p$, si y sólo si

$$\lim_n R_n(z) = \widehat{g}(z), \tag{4.35}$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U'_D, y

$$\sup_n \|S_n\| = C_0 < \infty. \tag{4.36}$$

Demostración *Del teorema de Banach-Steinhauss tenemos que (4.34) implica (4.36).*

De (4.34) también concluimos la convergencia puntual $\lim_n R_n(z) = \widehat{g}(z)$, $z \in U'_D$, ya que $f_z \in H^p$, $z \in U_D$, y $S_n(f_z) = R_n(z)$.

Para obtener (4.35), basta ahora probar que la familia (R_n) es normal en U_D. Sea K un compacto de U_D. Entonces

$$\frac{1}{|s-z|} \leq \frac{1}{d(K,T)}; \quad z \in K, \ s \in T.$$

Luego, si $z \in K$

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_T |R_n(s) f_z(s)| \, |ds| \leq \frac{\|S_n\|}{d(K,T)} \leq \frac{C_0}{d(K,T)}.$$

El principio del máximo para funciones analíticas prueba que la convergencia es uniforme sobre cada conjunto cerrado contenido en U'_D.

Probemos ahora que (4.35) y (4.36) implican a (4.34).

Sea A una parte infinita y acotada del plano, tal que la clausura de A está contenida en U_D. Entonces la familia $F(A) = \{f_z, \ z \in A\}$, tiene envoltura lineal densa en H^p.

En efecto, según el teorema de Hahn-Banach, basta demostrar que el único funcional continuo sobre H^p que se anula sobre $F(A)$, es el funcional nulo.(13) *Sea $F \in (H^p)'$. Existe $g \in H^p$ tal que para toda $f \in H^p$ ([72], teorema 7.3)*

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt. \tag{4.37}$$

Si para toda $z \in A$ tenemos que

$$F(f_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{g(e^{it})} dt \right] \frac{1}{z^{n+1}} = 0,$$

[13] Se refiere a una consecuencia del teorema de extensión continua de funcionales continuos.

entonces los coeficientes de Fourier de $\overline{g}$ son nulos para $n = 0, -1, -2, ...,$ por tanto g, y correspondientemente el funcional F, son idénticamente iguales a cero (ver el teorema 3.4 de [72]).

De (4.35) tenemos que $S_n(f_z)$ converge a $L(f_z)$ para todo $z \in U_D$. En particular para todo $z \in A$. El teorema de Banach[14] *y la condición (4.36) terminan de probar (4.34).* ■

Si $p = \infty$ se cumple que (4.34) implica a (4.35) y (4.36).

La condición (4.36) del teorema 4.2.1 se explica mejor con el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2 *Cualquiera sea p, $1 \leq p < \infty$, existe $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$, uniformemente convergente sobre cada compacto contenido en U_D, y tal que los funcionales*

$$S_n(f) = \int_T f(s) R_n(s) ds, \; n \in \mathbb{N}, \; f \in H^p,$$

divergen para toda f de un cierto conjunto G_δ denso en H^p, y convergen puntualmente sobre H^∞, a un funcional no acotado en la norma de H^p.

Demostración *Sea $f_0 \in H^p \backslash H^\infty$, y sea $(z_k) \subset D$ tal que*

$$\lim_k |f_0(z_k)| = \infty,$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{|f_0(z_k)|}} < \infty,$$

$$\sum_{k \geq 1} (1 - |z_k|) < \infty,$$

$$0 < a \leq |z_k| < 1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Definamos

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k \, f(z_k)}{\sqrt{|f_0(z_k)|}},$$

donde $s_k = \exp(-arg\, f_0(z_k))$.

Es simple comprobar que $S_n(f)$ converge para toda $f \in H^\infty$. En particular converge para $f = f_z$, $z \in U_D$. Un razonamiento similar al de la demostración del teorema 4.2.1, prueba que

$$R_n(z) = S_n(f_z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{\sqrt{|f_0(z_k)|}\,(z - z_k)},$$

[14]Si $L_n : X \to Y$ cumple $\lim_n L_n(x) = L(x)$ para x en una parte de X con envoltura lineal densa, y $\sup_n \|L_n\| < \infty$, entonces L_n converge puntualmente a L en X.

converge uniformemente sobre cada compacto contenido en U_D. Sin embargo

$$S_n(f_0) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|f_0(z_k)|} \to \infty.$$

Del principio de acotación uniforme, tenemos que $S_n(f)$ diverge para f en un conjunto G_δ denso en H^p.

El funcional

$$L(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k f(z_k)}{\sqrt{|f_0(z_k)|}},$$

es continuo en $(H^\infty, \|\cdot\|_p)$. En cambio, si consideramos al espacio de las funciones de H^∞ con la norma $\|f\|_p$ de H^p, entonces L es no acotado. Para probarlo supongamos que L es continuo sobre el espacio $(H^\infty, \|\cdot\|_p)$. Según los teoremas de Hahn-Banach y 7.3 de [72], existe $g \in H^q$ tal que

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt, \ f \in H^\infty.$$

Sea Φ el funcional lineal y continuo sobre H^p definido por

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(e^{it})f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt,$$

donde $f \in H^p$, y B es el producto de Blaschke asociado a la sucesión (z_n).

Como Φ es continuo y $\Phi(f) = L(Bf) = 0$ para toda $f \in H^\infty$, tenemos que $\Phi \equiv 0$, ya que H^∞ es denso en H^p. Lo que indica que $B\overline{g} \in H_0^q$ (funciones de H^q que se anulan en cero). Como B^{-1} es holomorfo en una vecindad del cero, concluimos que $g \equiv 0$, lo que constituye una contradicción pues L no es idénticamente cero. ■

El teorema 4.2.2 muestra que es imposible caracterizar a la convergencia de sucesiones de $\mathcal{R}_0$, en términos de la convergencia puntual de las correspondientes cuadraturas sobre el espacio H^p, $1 \leq p < \infty$.

De la teoría de interpolación en los espacios H^p, es también posible obtener ejemplos como los que ofrece el teorema 4.2.2.[(15]

La función $L(f_z)$, donde L es el funcional construido en el teorema 4.2.2, pertenece al espacio H_0 y no es de la forma $\widehat{g}$, con $g \in L^q(T)$.

---

[15] Ver los ejercicios 1 y 2 del capítulo 9 de [72].

4.2.3. Conexión entre las convergencias fuerte y débil

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto definido por

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{z\in A} a(z) f_z;\ A \in \mathcal{M},\ (a(z))_{z\in A} \in l^1 \right\},$$

donde $\mathcal{M}$ es la familia de todos los subconjuntos acotados y numerables del plano complejo, cuya clausura está contenida en U_D.

Los valores de las series

$$g(s) = \sum_{z\in A} a(z) f_z(s) \quad \text{y} \quad \sum_{z\in A} |a(z)|, \tag{4.38}$$

no dependen del ordenamiento que demos a los elementos de A.

Otra forma de representar a la función g de (4.38) es mediante una integral de Lebesgue. Es decir

$$g(s) = \int_A f_z(s) d\mu(z),$$

donde μ es la medida compleja regular sobre A definida por $\mu(\{z\}) = a(z)$. Las series con la expresión de $g(s)$ en (4.38) reciben el nombre de series de Borel. En [98] son brevemente tratadas en conexión con los problemas de prolongación analítica.

La convergencia absoluta y uniforme sobre D_0 de la serie $g(s)$ de (4.38), prueba que $\mathcal{B} \subset H(D_0)$.

Para $A \in \mathcal{M}$ y $s \in D_0$ definamos

$$F_s((a(z))_{z\in A}) = \sum_{z\in A} a(z) f_z(s).$$

Es obvio que F_s representa un funcional lineal y continuo sobre l^1.

Sea $\mathcal{N}_A = \cap \left\{ F_s^{-1}\{0\};\ s \in D \right\}$. Es conocido que $l^1/\mathcal{N}_A$ con la norma

$$\|a + \mathcal{N}_A\| = \inf \left\{ \|a + y\|_1,\ y \in \mathcal{N}_A \right\},$$

donde $a \in l^1$ y $\|\cdot\|_1$ denota a la norma de l^1, es un espacio de Banach con dual $(\mathcal{N}_A)^\perp$ (ver [72], pag. 10).

Sea $\mathcal{C}_A$ el cociente por $\mathcal{N}_A$ del subespacio vectorial de aquellas funciones de $\mathcal{B}$ referidas al elemento $A \in \mathcal{M}$ fijo. Este espacio con la norma

$$\| \sum_{z\in A} a(z) f_z \|_A := \|(a(z))_{z\in A} + \mathcal{N}_A\|,$$

es isométricamente isomorfo a $l^1/\mathcal{N}_A$.

Sea $(\mathcal{B}, I)$ el límite inductivo del sistema $\{(\mathcal{C}_A, \|\cdot\|_A);\ A \in \mathcal{M}\}$, con respecto a las funciones $I_A : \mathcal{C}_A \to \mathcal{B}$, donde $I_A(g) = g$, $g \in \mathcal{C}_A$, $A \in \mathcal{M}$.[16]

Es bien conocido que este espacio vectorial topológico resultante $(\mathcal{B}, I)$, es barrilado (ver [206]).

Definamos ahora al espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ de todas las funciones complejas h, definidas en U'_D, tales que $(h(z))_A \in (\mathcal{N}_A)^\perp$, para cada $A \in \mathcal{M}$, con la topología de la $\mathcal{M}$-convergencia.

El siguiente lema caracteriza al espacio dual de $(\mathcal{B}, I)$.

Lema 4.2.1 *El espacio dual de $(\mathcal{B}, I)$, provisto de la topología de la W-convergencia, donde W es la familia de las uniones finitas de conjuntos acotados en algún $\mathcal{C}_A$, $A \in \mathcal{M}$, es isomorfo al espacio $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, y este isomorfismo está expresado en la siguiente forma. Si $L \in (\mathcal{B}, I)'$, entonces existe una única $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, tal que para cada $g \in \mathcal{B}$, cuya representación está dada por*

$$g = \sum_{z \in A} a(z) f_z,$$

tenemos que

$$L(g) = \sum_{z \in A} a(z) h(z).$$

Demostración *Si $A \subset A_1$, con A, $A_1 \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{N}_A$ es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{N}_{A_1}$ que, para simplificar, también denotaremos por el símbolo $\mathcal{N}_A$. Por tanto $\mathcal{N}_{A_1}^\perp \subset \mathcal{N}_A^\perp$, y podemos escribir $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}_{A_1}$.*

La anterior inclusión tiene el sentido de la inyección natural $i(A, A_1)$ de $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_{A_1}$, cuya definición precisaremos a continuación. Para $(a(z))_{z \in A} \in l^1$ definamos $(a_1(z))_{z \in A_1}$ como $a_1(z) = a(z)$ si $z \in A$, y cero en los demás casos. Entonces se cumple la siguiente inclusión entre clases de equivalencia.

$$K_A = \sum_{z \in A} a(z) f_z + \mathcal{N}_A \subset \sum_{z \in A_1} a_1(z) f_z + \mathcal{N}_{A_1} = K_{A_1}.$$

Es decir, la definición de la inyección canónica es $i(A, A_1)(K_A) = K_{A_1}$.

Sea $L \in (\mathcal{B}, I)'$. Entonces

$$L/[\mathcal{C}_{A_1}] \leftrightarrow h_1 \in \mathcal{N}_{A_1}^\perp,$$

$$L/[\mathcal{C}_{A_2}] \leftrightarrow h_2 \in \mathcal{N}_{A_2}^\perp,$$

$$L/[\mathcal{C}_{A_1 \cup A_2}] \leftrightarrow h_3 \in \mathcal{N}_{A_1 \cup A_2}^\perp \subset \mathcal{N}_{A_1}^\perp \cap \mathcal{N}_{A_2}^\perp,$$

siendo A_1, $A_2 \in \mathcal{M}$ y $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Concluimos de las relaciones anteriores que $h_3/A_1 \equiv h_1$ y $h_3/A_2 \equiv h_2$. Es

[16] Con el objetivo de simplificar, en lo sucesivo $\mathcal{B}$ y $(\mathcal{B}, I)$ denotarán indistintamente al límite inductivo de los espacios cociente $\mathcal{C}_A$. Los conceptos de límite inductivo y proyectivo pueden verse en [206].

decir, $h_1/A_1 \cap A_2 \equiv h_2/A_1 \cap A_2$.

Hemos demostrado que si $L \in \mathcal{B}'$, *existe una única* $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ *tal que para toda* $A \in \mathcal{M}$, h/A *representa a* $L/\mathcal{C}_A$.

Sea ahora H *la función*

$$H \,:\, \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to (\mathcal{B}, I)',$$

definida por

$$H(h)\left(\sum_{z\in A} a(z) f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) h(z).$$

Esta función H *está bien definida puesto que* $H(h) \circ I_A \in \mathcal{C}'_A,\ A \in \mathcal{M}$.

Ya demostramos que H *es biyectiva. También es simple comprobar que* H *es lineal.*

Por otra parte, el espacio $(\mathcal{B}, I)'$ *es el límite proyectivo de los espacios* $\mathcal{C}'_A$ *y las transpuestas* I'_A *de los homomorfismos* I_A *(ver [206]). De modo tal que* H *es continuo si y solo si* $I'_A \circ H$ *es continua para cada* $A \in \mathcal{M}$, *y esto último es cierto pues*

$$\|H(h) \circ I_A\| = \sup_{z\in A} |h(z)| = p_A(h), \tag{4.39}$$

para cada $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Sea f_A *la función*

$$f_A : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})/p_A^{-1}(0),$$

donde $\mathcal{F}(\mathcal{M})/p_A^{-1}(0)$ *representa al cociente de* $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ *por el subespacio* $p_A^{-1}(0)$. *Como la topología de* $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ *está generada por las seminormas* $p_A,\ A \in \mathcal{M}$, *basta probar que* $H^{-1} \circ f_A$ *es continua para todo* $A \in \mathcal{M}$, *para tener que* H^{-1} *es continua, lo cual se deduce del siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}, T)' & \xrightarrow{H^{-1}\circ f_A} & \mathcal{F}(\mathcal{M})/p_A^{-1}(0) \\ I'_A \ \downarrow & & \uparrow \ \phi_A \\ C'_A & \xrightarrow[\psi_A]{} & \mathcal{N}_A^{\perp} \end{array}$$

donde ϕ_A *y* ψ_A *son los correspondientes isomorfismos canónicos.*[17] ■

Lema 4.2.2 $H_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

[17]Decimos canónicos porque sus respectivas definiciones no dependen de una base del espacio.

Demostración *Para cada $A \in \mathcal{M}$ sea S_A el menor subespacio cerrado de l^∞ que contiene a las sucesiones $(f_z(s))_{z\in A},\ s \in D$.*

Es simple comprobar que $S_A \in (\mathcal{N}_A)^\perp$.

Consideremos al espacio E de todas las funciones analíticas en D, con la topología de la convergencia uniforme sobre cada compacto de D. Sea F el espacio de las funciones $g \in E$ tales que $g(0) = 0$.

Para $s, t \in D$ pongamos

$$g_s(t) = \frac{t}{st - 1}.$$

El conjunto $G = \{g_s,\ s \in D\}$ tiene envoltura lineal densa en F. En efecto, sea $L \in F'$ tal que

$$L(g_s) = 0,\ s \in D. \tag{4.40}$$

Del teorema de Hahn-Banach y de [163], p. 596, existe una sucesión (σ_n) con

$$\limsup_n \sigma_n^{1/n} = \sigma < 1,$$

tal que para cada $g \in F$

$$L(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n\, g^{(n)(0)}}{n!}. \tag{4.41}$$

De (4.40) y (4.41) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n\, s^{n-1} = 0,\ s \in D.$$

Por consiguiente $\sigma_n = 0,\ n \geq 1$, y por tanto $L \equiv 0$.

Sea ahora $f \in H_0$ y definamos la siguiente función $g \in F$

$$g(t) = \begin{cases} f\left(t^{-1}\right) & si \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, existe una sucesión de combinaciones lineales finitas de funciones en G, que denotaremos por (p_n), tal que

$$\lim_n \left(sup\left\{|p_n(z) - g(z)|,\ z \in K\right\}\right) = 0,$$

para cada compacto $K \subset D$. Por consiguiente, si $A \in \mathcal{M}$ la función f satisface

$$\lim_n \left(sup\left\{\left|f(z) - p_n\left(z^{-1}\right)\right|,\ z \in A\right\}\right) = 0.$$

Concluimos que

$$(f(z))_{z\in A} \in S_A \subset (\mathcal{N}_A)^\perp,$$

porque $g_s\left(z^{-1}\right) = f_z(s)$. *El lema está demostrado.* ■

Conocemos en algunos casos que $\mathcal{N}_A$ es el espacio trivial. Por ejemplo, cuando el conjunto de los puntos de acumulación de A es finito. Sin embargo, aún ignoramos qué ocurre en general.

Teorema 4.2.3 *Sean* f, $f_n \in \mathbb{N}$, *funciones de* H_0. *Existen* L, L_n; $n \in \mathbb{N}$, *funcionales lineales y continuos sobre* $\mathcal{B}$, *tales que*

$$f(z) = L(f_z),\ f_n(z) = L_n(f_z),\ n \in \mathbb{N},\ z \in U_D, \tag{4.42}$$

$$\lim_n f_n(z) = f(z), \tag{4.43}$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U_D', *si y solo si*

$$\lim_n L_n(g) = L(g), \tag{4.44}$$

para cada $g \in \mathcal{B}$.

Demostración *Definamos a los siguientes funcionales.*

$$L\left(\sum_{z\in A} a(z)\, f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) f(z), \tag{4.45}$$

$$L_n\left(\sum_{z\in A} a(z)\, f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) f_n(z),\ n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{M}. \tag{4.46}$$

La condición (4.42) es obviamente cierta, y los lemas 4.2.1 y 4.2.2 demuestran que los funcionales (4.45) y (4.46) son lineales y continuos.

La igualdad (4.39) nos prueba que

$$\|(L_n - L)\circ I_A\| = \sup\left\{|f_n(z) - f(z)|;\ z \in A\right\},$$

de lo cual concluimos inmediatamente que (4.43) implica a (4.44).

Observamos que (4.44) expresa que la sucesión (f_n) *converge puntualmente a* f. *Pero (4.44) es también suficiente para que* (f_n) *sea una familia normal en* U_D, *porque si* K *es un compacto de* U_D, *y* $A \in \mathcal{M}$ *es tal que* $\overline{A} = K$, *entonces por el teorema de Banach-Steinhauss existe* $K(A) > 0$ *tal que*

$$|f_n(z)| = |L_n \circ I_A(f_z)| \leq K(A)\|f_z\|_A \leq K(A),$$

$n \in \mathbb{N}$, $z \in A$. *Por la continuidad de cada* f_n, *tenemos que*

$$|f_n(z)| \leq K(A),$$

es válido para cada $z \in K$.

La convergencia puntual y la condición de normalidad de la sucesión (f_n), prueban la convergencia sigma compacta de (f_n) a f. Esto último el principio del máximo para funciones analíticas implican la convergencia uniforme de (f_n) sobre cada conjunto cerrado de U'_D. El teorema está demostrado. ■

Observemos que el lema 4.2.1 muestra verdaderamente que $L_n \to L$ uniformemente sobre cada conjunto acotado en algún espacio $\mathcal{C}_A$, si y solo si $f_n \to f$ uniformemente sobre cada $A \in \mathcal{M}$. El teorema 4.2.3 expresa que cuando cada $f_n \in H_0$, la primera condición equivale a la convergencia puntual, y la segunda equivale a que $f_n \to f$ uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U'_D.

4.2.4. Caracterización de la convergencia en $|z| > 1$

El lema 4.2.2 permite afirmar que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$, y por tanto, si $R \in \mathcal{R}_0$, el funcional S asociado pertenece a $(\mathcal{B}, I)'$, y se representa de forma única según la expresión dada en (4.33).

En lo que queda de este epígrafe tendremos en cuenta que de acuerdo con la propia definición $R \in \mathcal{R}_0$ es analítica en la región $|z| > \rho > 0$, para cierto número ρ, $0 < \rho < 1$.

Corolario 4.2.1 *Sea (R_n) una sucesión de funciones racionales de la clase $\mathcal{R}_0$. Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión (R_n) converja uniformemente sobre cada conjunto cerrado contenido en U'_D, es que el límite*[18]

$$\lim_n \int_T g(s) R_n(s) ds,$$

exista para cada $g \in \mathcal{B}$.

Demostración *Comencemos demostrando la necesidad. Supongamos que*

$$f(z) = \lim_n R_n(z), \ z \in U'_D.$$

Está claro que $f \in H_0$. Sea ahora $L \in (\mathcal{B}, I)'$ tal que $f(z) = L(f_z)$ (lema 4.2.1). Existe una sucesión $L_n \in \mathcal{B}'$ tal que $L_n(f_z) = R_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, $|z| > 1$. La expresión

$$L_n(g) = \int_T g(s) R_n(s) ds, \ \ g \in \mathcal{B},$$

es válida y es la única posible para representar a cada L_n. La conclusión la tenemos del teorema 4.2.3.

[18] La integral se toma respecto a uno cualquiera de los representantes de la clase de equivalencia g.

Para probar la suficiencia tengamos en cuenta que el límite débil en $\mathcal{B}'$ es cerrado. De manera que si L es el límite de los funcionales asociados a (R_n), el propio teorema 4.2.3 afirma que (R_n) converge uniformemente sobre cada conjunto cerrado contenido en U'_D, a la función $L(f_z)$. ■

El tipo de representación que utilicemos para los funcionales $L,\ L_n \in \mathcal{B}'$ permite variar algo la técnica de demostración como ocurre con el corolario 4.2.1 respecto a los rersultados anteriores. Dejamos al lector la demostración de la siguiente caracterización, usando los teoremas de Fubini e integral de Cauchy.

Proposición 4.2.3 *Sea b una medida compleja de variación finita sobre los borelianos de D_0 (disco unidad cerrado), con transformada de Cauchy $\widehat{b}$, y sea $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$.*

Para que

$$\lim_n R_n(z) = \widehat{b}(z) := \int_{D_0} f_z \, db,$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U'_D, es necesario y suficiente que

$$\lim_n \int_T g(s) R_n(s) ds = \int_{D_0} g(s) db(s),$$

para cada $g \in H(D_0)$.

Podemos probar que para todo $A \in \mathcal{M}$, las clausuras de $\mathcal{C}_A$ y $P[z]$ (polinomios en la variable compleja z) son iguales en $C(D_0)$.

4.2.5. Cuadraturas óptimas y aproximación racional

Definición 4.2.3 *Sea S_n un aproximante de cuadratura de la forma (4.33), con orden menor o igual a n, y sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $L \in (H^p)'$ definimos el error de S_n en la clase H^p por*

$$E_n(H^p, L, S_n) =$$

$$E_n(H^p) := \sup \{ |(S_n - L)(f)|;\ f \in H^p,\ \|f\|_p \leq 1 \} = \|S_n - L\|.$$

El error óptimo asociado a L está definido por

$$E_{n,p}(L) := \inf \{ E_n(H^p);\ S_n \},$$

donde S_n recorre el conjunto de todas las cuadraturas de orden $\leq n$.

Proposición 4.2.4 *Sea $C \subset U'_D$, C cerrado, y sea $L \in (H^p)'$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para cada n se cumple que*

$$d(C,D)\, R_n(L(f_z),C) \leq E_{n,p}(L), \tag{4.47}$$

donde $d(C,D)$ es la distancia entre C y D, y $\mathcal{R}_n(f,I)$ es la mejor aproximación racional y uniforme de orden n, de la función f sobre I.

Demostración *Dado que $\|d(C,D)f_z\|_p \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$, obtenemos para cada regla S_n de orden $\leq n$, y $z \in \mathbb{C}$*

$$|L(f_z) - S_n(f_z)| = d(C,D)^{-1} \|L\left(d(C,D)f_z\right) - S_n\left(d(C,D)f_z\right)\|_C \leq$$
$$\leq \|L - S_n\|\, d(C,D)^{-1},$$

luego

$$\|L(f_z) - R_n(z)\|_C \leq \|L - S_n\|\, d(C,D)^{-1}, \tag{4.48}$$

donde $R_n(z) = S_n(f_z)$.

De (4.48) deducimos que

$$d(C,D)\, R_n(L(f_z)),C) \leq \|L - S_n\|,$$

para todo aproximante S_n de orden $\leq n$, y por tanto se cumple (4.47). ∎

La desigualdad (4.47) podemos obtenerla para $1 \leq p < \infty$, de

$$d(C,D)\|S_n - L\|_A \leq \|S_n - L\|_{H^p}, \tag{4.49}$$

donde $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_{H^p}$ denotan aquí a las normas en los espacios duales de $\mathcal{C}_A$ y H^p respectivamente y $A \in \mathcal{M}$ es tal que la clausura de A es igual a C (C es infinito y compacto).

La desigualdad (4.49) es consecuencia de

$$d(C,D)\, \|g\|_p \leq \|g\|_A$$

y de ser $\mathcal{C}_A$ denso en H^p, $1 \leq p < \infty$ (ver demostración del teorema 4.2.1).

Si C es finito, la desigualdad (4.47) es obviamente válida a partir de un cierto rango.

La desigualdad (4.48) es más general que (4.26).

Sea

$$L(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

con $f \in H^p$, $1 < p \leq \infty$. De [7, 243] deducimos que para todo compacto $K \subset U_D$,

$$R_n\left(L(f_z), K\right) = o\left(E_{n,p}(L)\right),$$

ya que
$$R_n\left(L(f_z),K\right)=\mathcal{O}(\exp(-nc)), \tag{4.50}$$
con $c>0$ (ver [243]), y
$$E_{n,p}(L)=\mathcal{O}\left(exp(-k\sqrt{n})\right), \tag{4.51}$$
$k>0$, ver [7]). Ambos estimados (4.50) y (4.51) son exactos.

Sea ahora
$$L_a(f)=\int_{-a}^{a} f(x)\,d\mu(x),$$
donde la componente absolutamente continua de μ es mayor que cero casi dondequiera, y $0<a<1$. De [103], el teorema 4.1.6 de la sección 4.1 y la proposición 4.2.4 deducimos que $R_n\left(L_a(f_z),[b,c]\right)$, $b<c<-1$, o $1<b<c$, y $E_{n,p}(L_a)$, tienen ambos un orden geométrico de convergencia a cero. Más precisamente, se cumplen las siguientes desigualdades
$$\exp\left(-\frac{2}{C_1}\right)=\lim_n R_n\left(L_a(f_z),[b,c]\right)\leq$$
$$\leq \liminf_n E_{n,p}(L_a)^{1/n}\leq \limsup_n E_{n,p}(L_a)^{1/n}\leq$$
$$\leq \lim_n E_{n,p}(H^p)^{1/n}=\exp\left(-\frac{2}{C_a}\right),$$
donde C_1 y C_a son respectivamente las capacidades de los condensadores planos $([b,c],[-a,a])$ y $(T,[-a,a])$, y $E_{n,p}(H^p)$ es tal como la definimos en 4.2.3, el error en la clase H^p, asociado a cuadraturas racionales de tipo Gauss.

Proposición 4.2.5 *Sea μ una medida finita y positiva, con soporte $S\mu\subset D_a:=\{z;\ |z|\leq a\}$, $0<a<1$. Si $\mathcal{R}_n(\widehat{\mu},T)_\infty$ es la mejor aproximación sobre T, de la función $\widehat{\mu}(z)=\int f_z\,d\mu$, por medio de funciones racionales de orden menor que n, con ceros en el infinito y polos en D, entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad*
$$E_{n,p}(L)\leq \mathcal{R}_n(\widehat{\mu},T)_\infty,$$
donde
$$L(f)=\int f\,d\mu.$$

Demostración *Los teoremas integral de Cauchy y de Fubini prueban que*
$$|(L-S_n)(f)|\leq \|f\|_p\|\widehat{\mu}-R_n\|_T, \tag{4.52}$$
donde $f\in H^p$, S_n es un aproximante del tipo (4.33) de orden menor que n, con nodos en D_a, y $R_n(z)=S_n(f_z)$.

Tomando supremos cuando $\|f\|_p \leq 1$, y después ínfimos en ambos miembros de (4.52), cuando S_n recorre la clase de los aproximantes de tipo (4.33) y de orden n, obtenemos la tesis. ■

Sea $g(z,a)$, $a \in T$ la función de Green de la región $C\backslash T$ con polo en $z = a$.

Definamos la sucesión (d_n) por

$$d_n = \sup_{(z_1,...,z_n);\ z_k \in D_a} \min_{z\in D_a} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(z, z_k),$$

donde $D_a = \{z;\ |z| \leq a\},\ 0 < a < 1$.

Es conocido que existen puntos $b_{n,1}, b_{n,2}, ..., b_{n,n}$, elementos de D_a tales que[19]

$$d_n = \min_{z\in D_a} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(z, b_{n,k}).$$

El teorema 2 de [40] afirma que existe el

$$\lim_n d_n = d. \tag{4.53}$$

Tiene lugar el siguiente resultado.

Corolario 4.2.2 *Con las mismas hipótesis de la proposición 4.2.5, tenemos que*

$$\limsup_n E_{n,p}(L)^{1/n} \leq e^{-d},$$

donde $d > 0$ es la constante dada por (4.53).

Demostración *El teorema 3 de [40] afirma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función racional r_n, de orden $\leq n$ y polos en D_a, tal que*

$$\limsup_n \|f - r_n\|_T^{1/n} \leq e^{-d}.$$

Sean $0 < d_1 < d$ y n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$\|f - r_n\| \leq \exp(-nd_1). \tag{4.54}$$

Sea S_n la regla de integración de tipo (4.33) y con nodos en D_a tal que

$$r_n(z) = r_n(\infty) + S_n(f_z).$$

De (4.54) y el principio del máximo deducimos que

$$|r_n(\infty)| \leq \exp(-nd_1).$$

[19] Ver teorema 1 de [40].

Por tanto

$$|f(z) - S_n(f_z)| \leq 2\exp(-nd_1),$$

para toda $z \in T$. *De la proposición 4.2.5 tenemos que*

$$E_{n,p}(L) \leq 2\exp(-nd_1).$$

Luego

$$\operatorname*{lím\,sup}_n E_{n,p}(L)^{\frac{1}{n}} \leq \exp(-d_1).$$

Como $d_1 < d$ *es cualquiera, tenemos la tesis del corolario.* ∎

Bibliografía

[1] Achiezer N. I., *Theory of approximation*, (UNGAR. New York, 1956).

[2] Ahlfors L. V., *Análisis de variable compleja*, (Aguilar S.A. Madrid, 1971)

[3] Ambroladze A. y H. Wallin, *Approximation by repeated Padé approximants*, J. Comp. Appl. Math., **62** (1995), 353-358.

[4] Ambroladze A. y H. Wallin, *Convergences rates of Padé and Padé-type approximants*, J. Approx. Theory, **86** (1996), 310-319.

[5] Ambroladze A. y H. Wallin, *Padé-type approximants of Markov and meromorphic functions*, J. Approx. Theory, **88** (1997), 354-369 .

[6] Ames W.F., *Numerical methods for partial differential equations*, Academic Press, London, (1992).

[7] Andersson J. E., *Optimal quadrature of H^p functions*, Math. Z., **172** (1980), 55-62.

[8] Andersson J. E. y B. D. Bojanov, *A Note on the optimal quadrature in H^p*, J. Numer. Math., **44** (1984), 301-308.

[9] Bagby T., *On interpolation by rational functions*, Duke Math. J., **36**, N^o 1 (1969), 95-104.

[10] Bahvalov N.S., *On the optimal speed of integrating analytic functions*, Zh. Vychisl. Mat. Fiz., **7** (1967), 1011-1020. [traducido al inglés en: USSR Comput. Math. Phys., **7**, 63-75.]

[11] Baker C. T. H., *The numerical treatment of integral equations*, (Oxford University Press, 1977).

[12] Baker G. A., Jr.,*Essentials of Padé approximants*, (Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975)

[13] Baker G. A., Jr. y P. Graves-Morris, *Padé approximants*, (Second Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1996).

[14] Banks H. T. y K. Kunisch, *Estimation techniques for distributed parameter systems*, (Birkhäuser, Boston, 1989).

[15] Baratchart L. y F. Wielonsky, *Rational approximation in the real Hardy space H^2 and Stieltjes integrals: a uniqueness theorem*, Constr. Approx., **9** (1993), 1-21.

[16] Baratchart L., H. Stahl y F. Wielonsky, *Non-uniqueness of rational best approximants*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 141-154.

[17] Barrar R. B. y H. L. Loeb y H. Werner, *Optimal integration formulas for analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **79**, 6 (1973), 1296-1298.

[18] Bello M., F. Cala, J.J. Guadalupe y G. López Lagomasino, *Convergence rate of Padé-type approximants for Stieljes functions*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 47-53.

[19] Bernstein N., *Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degrés donnés*, Acta Math. **37** (1913), 1-57.

[20] Berrut J-P. y H. D. Mittelmann, *Exponentially convergent linear rational interpolation between equidistant (and other) points*, Methods Appl. Anal., **4** (1) (1997), 67-76.

[21] Bessis D., *Padé approximations in noise filtering*, J. Comput. Appl. Math. **66** (1-2) (1996), 85-88.

[22] Birkhoff G. y G. Rota, *Ordinary differential equations*, (John Wiley & Sons, New York, 1989)

[23] Blatt H., P. y E. B. Saff, *Behavior of zeros of polynomials of near best approximation*, J. Approx. Theory, **46** (1986), 323-344.

[24] Bloom T., D. S. Lubinsky y H. Stahl, *Interpolatory integration rules and orthogonal polynomials with varying weights*, Numer. Algorithms, **3** (1992), 55-66.

[25] Bloom T., D. S. Lubinsky y H. Stahl, *What distributions of points are possible for convergent sequences of interpolatory integration rules?*, Constr. Approx., **9** (1993), 41-58.

[26] Bloom T., D. S. Lubinsky y H. Stahl, *Distributions of points for convergent interpolatory integration rules on* $(-\infty, \infty)$., Constr. Approx., **9** (1993), 59-82.

[27] Bojanov B. D, *On an optimal quadrature formula*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **27**, Nº 5, (1974), 619-621.

[28] Bojanov B. D, *Best quadrature formula for a certain class of analytic functions*, Zastosowania Mat., Appl. Math. (Warsaw) XIV, **3** (1974), 441-447.

[29] Bojanov B. D, *New best quadrature formulae*, Serdica Math. J., Vol. I, (1975), 110-120.

[30] Bojanov B. D, *Best cubature formulas*, Serdica Math. J., Vol II, (1976), 42-52.

[31] Bojanov B. D, *Best approximation of linear functionals in W_p^r*, Pliska, **1**, (1977), 100-111.

[32] Bojanov B. D, *Characterization and existence of optimal quadrature formulas for a class of differentiable functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **232**, (6) (1977); [traducido al inglés en: Soviet Math. Dokl., **18** Nº 1, (1977), 215-218.]

[33] Bojanov B. D, *On the existence of optimal quadrature formulae for smooth functions*, Estratto da Calcolo, Vol. XVI, fasc. I, (1979), 61-70.

[34] Bojanov B. D, *Existence and characterization of monosplines of least L^p deviation*, Constructive Function Theory'77, Sofia, (1980), 249-268.

[35] Bojanov B. D, *Uniqueness of optimal nodes of quadrature formulas*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **33**, Nº 2, (1980), 525-546.

[36] Bojanov B. D, *Uniqueness of optimal nodes of quadrature formulas*, Math. Comp. **36**, Nº 154, (1981), 525-546.

[37] Borosh, I. y C. K. Chui, *On characterization of functions by their Gauss- Chebyshev quadratures*, SIAM J. Math. Anal., **10**, (3) (1979), 532-541.

[38] Borwein P. B. y S. P. Zhou, *Rational approximation to Lipschitz and Zygmund classes*, Constr. Approx., **8** (1992), 381-399.

[39] Borwein P. B. y S. P. Zhou, *The usual behavior of rational approximation, II*, J. Approx. Theory, **72** (1993), 278-289.

[40] Boyadzieva T. y P. Boyadziev, *Rational approximation of analytic functions*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions, Varna (1984), 177-181.

[41] Braess D., *Nonlinear Approximation Theory*, (Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 1986).

[42] Brezinski C., *Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, (Birkhauser, Berlin, 1980).

[43] Brezinski C., *Error control in convergence acceleration processes*, IMA J. Numer. Anal. **3** (1983), 65-80.

[44] Brezinski C., *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, (Springer, Berlin, 1990).

[45] Brezinski C., *Extrapolation algorithms and Padé approximations: a historical survey*, Appl. Numer. Math. **20** (3) (1996), 299-318.

[46] Brudni Yu. A., *Aproximación racional y teoremas de inmersión*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **247** (1979), 269-272 (en ruso).

[47] Brutman L. y D. Toledano, *An extremal problem of Erdös in interpolation theory*, Comput. Math. Appl., **34**, (12) (1997), 37-47.

[48] Brutman L., *On rational interpolation to $|x|$ at the adjusted Chebyshev nodes*, J. Approx. Theory **95** (1998), 146-152.

[49] Bulanov A. P., *Asintótica para la menor desviación de $|x|$ de las fracciones racionales*, Mat. Sb., **76** (1968), 288-303 (en ruso).

[50] Bulanov A. P., *The order of approximation of convex functions by rational functions*, Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat., **33** (1969), 1132-1148 (en ruso).

[51] Bulanov A. P., *Aproximación de funciones convexas con módulo de continuidad dado, por medio de fracciones racionales*, Mat. Sb., **84**(126) (1971), 476-494. (en ruso)

[52] Bultheel A. y L. Wuytack, *Stability of numerical methods for computing Padé approximants*, in Approximation Theory III (E. W. Cheney, ed.), Academic Press, New York, (1980).

[53] Bultheel A., P. González-Vera y R. Orive, *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part I: Algebraic aspects*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 57-72.

[54] Bultheel A., C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera y R. Orive, *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part II: Convergence*, J. Comput. Appl. Math. **77** (1997), 53-76.

[55] Bultheel A., C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera y R. Orive, *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part III: The unbounded case*, J. Comput. Appl. Math. **87** (1997), 95-117.

[56] Bultheel A., C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera y R. Orive, *On the convergence of certain Gauss-type quadrature formulas for unbounded intervals*, Math. Comput., **69**, (230) (1999), 721-747.

[57] Bultheel A., P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njastad, *Orthogonal rational functions*, Cambridge Press, 1999.

[58] Burden R.I. y J.D. Faires, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, Mexico, 1985.

[59] Cala F., *Convergence of interpolating rational functios with preassigned poles*, Doctoral Dissertation, **11**, Department of Mathematics, Umeå University, 1997, ISSN 1102-8300.

[60] Cala Rodríguez F., P. González-Vera y M. Jiménez Paiz, *Quadrature formulas for rational functions*, Electron. Trans. Numer. Anal. **9** (1999), 39-52.

[61] Cala F. y G. López Lagomasino, *Multipoint Padé-type approximants. Exact rate of convergence*, Constr. Approx., **14** (1998), 259-272.

[62] Celorrio R. y F-J. Sayas, *The Euler-Maclaurin formula in presence of a logarithmic singularity*, BIT **39**, (4) (1998), 780-785.

[63] Cheney E. W., *Introduction to Approximation Theory*, (Mc Graw-Hill Book Company, 1966).

[64] Chung K.C., G.A. Evans y J.R. Webster, *A method to generate generalized quadrature rules for oscillatory integrals*, J. Comput. Appl. Math. **34** (2000), 85-93.

[65] Coleman T.F., F. Santosa y A. Verma, *Efficient calculation of Jacobian and adjoint vector products in the wave propagational inverse problem using automatic differentiation*, J. Comput. Phys. **157**, (2000), 234-255.

[66] Coman Gh., *The complexity of the quadrature formulas*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **23** (46), Nº 2 (1981), 183-192.

[67] de la Calle Ysern B. y G. López Lagomasino, *Weak convergence of varying measures and Hermite-Padé orthogonal polynomials*, Constr. Approx., **15** (1999), 553-575.

[68] DeVore R. A. y G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 303. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993).

[69] Diethelm K., *Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic properties and error estimates*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1-3) (1995), 97-114.

[70] Diethelm K., *New error bounds for modified quadrature formulas for Cauchy principal value integrals*, J. Comput. Appl. Math. **82** (1-2) (1997), 93-104.

[71] Diethelm K., *Error bounds for spline-based quadrature methods for strongly singular integrals*, J. Comput. Appl. Math. **89** (1998), 257-261.

[72] Duren P. L., *Theory of H^p Spaces*, (Academic Press, New York, 1970).

[73] Ehrich S., *Asymptotic properties of Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature formulae*, J. Approx. Theory **82** (1995), 287-303.

[74] Erdös P. y P. Turán, *On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation*, Acta Math. Hungar. **6** (1955), 47-65.

[75] Ehrich S., *Asymptotic properties of Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature formulae*, J. Approx. Theory, **82** (1995), 287-303.

[76] Erdös P. y P. Vértesi, *On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes*, Acta Math. Hungar., **36** (1980) 71-89.

[77] Erdös P., *Problems and results on the theory of interpolation. II*, Acta Math. Hungar. **12** (1961), 235-244.

[78] Freud G., *A contribution to the problem of rational approximation of real functions*, Studia Sci. Math. Hungar., **2** (1967), 419-423.

[79] Freud G., *Orthogonal Polynomials*, (Akad. Kiadó, Budapest and Pergamon Press, Oxford, 1971).

[80] Freud G., *Error estimates for Gauss- Jacobi quadrature formulae*, Topics in Numerical Analysis (J. Miller, Ed.), London: Academic Press (1973), 113-121.

[81] Frobenius G., *Ueber relationen zwischen den naherungsbrüchen von potenzreihen*, J. Reine Angew. Math., **90** (1881), 1-17.

[82] Fröberg C., *Introducción al análisis numérico*, Vicens-Vives, Barcelona, 1977.

[83] Ganelius T., *Rational approximation in the complex plane and on the line*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **2**, (1976), 129-145.

[84] Ganelius T., *Some extremal functions and approximation*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest, Hungary, (1976), 371-381.

[85] Ganelius T., *Rational approximation to x^α on* $[0,1]$, Anal. Math., **5** (1979), 19-33.

[86] Gauss C. F., *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+((\alpha\cdot\beta)/(1\cdot\gamma))x+...$ *etc.*, Collected Works, **III** (1812), 123-162.

[87] Gauss C. F., *Methodus Nova Integralium Valores per Aproximationem Inveniendi*, Collected Works, Vol III (1814), 163-196.

[88] Gautschi W., *Numerical quadrature in the presence of a singularity*, SIAM J. Numer. Anal., **4** (1967), 357-362.

[89] Gautschi W., *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, E. B. Christoffel. The influence of his work on mathematical and physical sciences (Basel) (P. L. Butzer and F. Feher, eds.), Birkhäuser Verlag (1981), 72-147.

[90] Gautschi W. y R. S. Varga, *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal., **20**, Nº 6, (1983), 1170-1186.

[91] Gautschi W., *Gauss-type quadrature rules for rational functions*, in "Numerical Integration IV"(H. Brass and G. Hämmerlin, Eds.), Internat. Series of Numerical Mathematics, **112**, 111-130, Birkhäuser, Basel (1993).

[92] Gautschi W., *Algorithm 793: GQRAT-Gauss quadrature for rational functions*, ACM Trans. Math. Software, **25**, 2 (1999), 213-239.

[93] Gautschi W., *The use of rational functions in numerical quadrature*, J. Comput. Appl. Math. **133** (2001), 111-126.

[94] Gilewicz J. y A.P. Magnus, *Optimal inequalities of Padé approximant errors in the Stieltjes case: closing result*, Integral Transforms and Special Functions **1** (1993), 9-18.

[95] Goluzin G. M., *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, (Translation of Mathematical Monographs, **26**, Providence, Rhode Island, Amer. Math. Soc. 1969).

[96] Gonchar A. A., *Estimates of the growth of rational functions and some of their applications*, Mat. Sb., **72** (114), 489-503; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **1** (1967), 445-456.]

[97] Gonchar A. A., *On the rate of rational approximation to continuous functions with characteristic singularities*, Mat Sb., **73** (115) (1967), 630-638; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **2** (1967), 561-568.]

[98] Gonchar A. A., *On a generalized analytic continuation*, Mat. Sb., **76** (118) (1968), 135-146; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **5**, (1) (1968), 129-140.]

[99] Gonchar A. A., *Zolotarev problems connected with rational functions*, Mat. Sb., **78** (120), 640-654; [traducido al inglés en: Math USSR, Sb., **7**, (1969) 623-635.]

[100] Gonchar A. A., *The rate of rational approximation and the properties of single-valuedness of an analytic function in the neighborhood of an isolated singular point*, Mat. Sb., **94** (136) (1974), (2) 265-282; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **23**, 2 (1974), 254-270.]

[101] Gonchar A. A., *On the convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*, Mat. Sb., **97** (139) (1975); 608-629;. [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **26** (1975), 555-575.]

[102] Gonchar A. A., *On the convergence of Generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Mat. Sb., **98**, (1975), 564-577; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **27** (1975), 503-514.]

[103] Gonchar A. A., *On the degree of rational approximation of some analytic functions*, Mat. Sb., **105**, 147-163; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **34** (1978), 131-145.]

[104] Gonchar A. A. y G. López Lagomasino, *On Markov's theorem for multipoint Padé approximants*, Mat. Sb., **105** (147) (1978), 512-524; [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **34** (1978), 449-459.]

[105] Gonchar A., G. López Lagomasino y E. Rakhmanov, *Some old and new results in rational approximation theory*, Rational Approximation and Orthogonal Polynomials. (M. Alfaro, ed.) Seminario Matemático "García de Galdeano", Universidad de Zaragoza, Colloquium on Rational Approximation and Orthogonal Polynomials, University of Zaragoza, (1988) 1-29.

[106] Gonchar A. A. y E. A. Rakhmanov, *Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions*, Mat. Sb., **134** (176) (1987); [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **62**, (2) (1989), 305-348.]

[107] González-Vera P., G. López Lagomasino, R. Orive y J. C. Santos, *On the convergence of quadrature formulas for complex weight functions*, J. Math. Anal. Appl., **189**, (1995), 514-532.

[108] González-Vera P., M. Jiménez Paiz, R. Orive y G. López Lagomasino, *On the convergence of quadrature formulas connected with multipoint Padé-type approximation*, J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 747-775.

[109] Graves-Morris P.R., *The numerical calculation of Padé approximants*, (in Padé approximation and its applications (L. Wuytack, ed.), p. 231. Springer- Verlag, Berlín and New York, 1979).

[110] Graves-Morris P.R., *A review of Padé methods for the acceleration of convergence of a sequence of vectors*, Appl. Numer. Math. **15** (2) (1994), 153-174.

[111] Grozev G. R., *Optimal quadrature formulae for differentiable functions*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions, Varna (1984), 376-381.

[112] Guerra F., J. Illán y I. Romero, *Rational methods to solve an identification problem of a non-homogeneous second order linear equation with singularities*, Proc. Internat. Conf. Approx. Optim. in the Caribbean, Ed. by M. Florenzano et al, Peter Lang Series in Approx. and Optim., **8** (1995), 367-378.

[113] Gustafson P.E. y B.A. Hagler, *Gaussian quadrature rules and numerical examples for strong extensions of mass distribution functions*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 317-326.

[114] Hasegawa T., *Numerical integration of functions with poles near the interval of integration*, J. Comput. Appl. Math. **87** (2) (1997), 339-357.

[115] Hatamov A., *Sobre la aproximación racional de funciones convexas*, Mat. Zametki., **98**(140), (1975), 268-279 (en ruso).

[116] Hoffman K., *Banach Spaces of Analytic Functions*, (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965).

[117] Hughes, T.J.R., *The finite element method. Linear static and dynamic finite element method*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 2000.

[118] Hunter D.B. y G. Nikolov, *Gaussian quadrature of Chebyshev polynomials*, J. Comput. Appl. Math., **94**, (1998), 123-131.

[119] Illán J. y G. López Lagomasino, *Sobre la convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé para funciones meromorfas de tipo Stieltjes*, Cienc. Mat. (Havana), **3** (2) (1981), 43-64.

[120] Illán J. y G. López Lagomasino, *Fórmulas de cuadratura para intervalos no acotados*, Cienc. Mat. (Havana), **3** (3) (1982), 29-47.

[121] Illán J. y G. López Lagomasino, *A note on generalized quadrature formulas of Gauss-Jacobi type*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions' 84, Varna (1984), 513-518.

[122] Illán J., *Estimates for the rational approximation of H^p functions*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **39**, N^o 3 (1986), 29-31.

[123] Illán J. y G. López Lagomasino, *Sobre los métodos interpolatorios de integración numérica y su conexión con la aproximación racional*, Cienc. Mat. (Havana), **8** (2) (1987), 31-44.

[124] Illán J., *On the rational approximation of H^p functions in the $L^p(\mu)$ Metric*, Lecture Notes in Math., **1354**, "In Approximation and Optimization, (A. Gómez et al Ed.) Springer Verlag (1987), 155-163.

[125] Illán J., *Integration rules for H^p spaces.*, Proc. Internat. Conf. Complex Analysis and Applications, Varna (1987), 235-240.

[126] Illán J., *Note on the analytic function approximation and an associated linear problem*, Proc. Internat. Conf. Complex Analysis and Applications'85, Varna (1985), 281-289.

[127] Illán J., *Sobre la caracterización de la convergencia en un espacio de fracciones y la integración numérica en los espacios H^p.*, Cienc. Mat. (Havana), **9** (3) (1988), 3-14.

[128] Illán J., *Una fórmula interpolatoria generalizada para la integración de funciones analíticas.*, Cienc. Mat. (Havana), **9** (1) (1988), 3-11.

[129] Illán J., *Piecewise rational approximation to continuous functions with characteristic singularities.*, J. Comput. Appl. Math., **99**, 1-2 (1998), 195-203.

[130] Ivanov K. G, *Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1,1]$ and $L_p[-1,1]$*, Colloq. Math Soc. János Bolyai, **35**, (1980), 675-682.

[131] Ivanov K. G, *New estimates of errors of quadrature formulae, formulae of numerical differentiation and interpolation*, Anal. Math., **6**, Fasciculus 4, (1980), 281-303.

[132] Jacek G. y P. Maciej, *Padé-type approximants and errors of Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 155-165.

[133] Jinyuan Du, *Quadrature formula of quasi-interpolation type for singular integrals with Hilbert kernel*, J. Approx. Theory **93** (1998), 231-257.

[134] Jones W.B., W.J. Thron y H. Waadeland, *A strong Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **261**, No. 2 (1980), 503-528.

[135] Jones W.B., O. Njåstad y W.J. Thron, *Two-point Padé expansions for a family of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **9** (1983), 105-123.

[136] Junghanns P. y U. Luther, *Cauchy singular integral equations in spaces of continuous functions and methods for their numerical solution*, J. Comput. Appl. Math. **77** (1-2) (1997), 201-237.

[137] Junghanns P. y K. Müller, *A collocation method for nonlinear Cauchy singular integral equations*, J. Comput. Appl. Math. **115** (2000), 283-300.

[138] Kadec M. I., *On the distribution of points of maximun deviation in the approximation of continuous functions*, Amer. Math. Soc. Transl., **26** (1963), 231-234.

[139] Kim P. y S. Lee, *A piecewise linear quadrature of Cauchy singular integrals*, J. Comput. Appl. Math. **95** (1998), 101-115.

[140] Kirov G. H., *Optimal quadrature formulae for function classes W_rH_m*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions, Varna (1984), 451-456.

[141] Kovacheva R., *Generalized Padé approximants and meromorphic continuation of functions*, Mat. Sb., **109** (151), (1979), 365-377; [traducido al inglés en: Math. USSR, Sb., **37** (1980).]

[142] Kutz M., *Asymptotic error bounds for a class of interpolatory quadratures*, SIAM J. Numer. Anal., **21**, Nº 1, (1984), 167-175.

[143] Laurie D.P., *Accurate recovery of recursion coefficients from Gaussian quadrature formulas*, J. Comput. Appl. Math. **112** (1999), 165-180.

[144] Laurita C., *Condition numbers for singular integral equations in weighted L^2 spaces*, J. Comput. Appl. Math. **116** (2000), 23-40.

[145] Levin M. y J. Girshovich, *Optimal quadrature formulas*, (Teubner-Textezur Mathematik, Leipzig, 1979).

[146] Levin A. L. y E. B. Saff, *Optimal ray sequences of rational functions connected with the Zolotarev problem*, Constr. Approx., **10** (1994), 235-273.

[147] Levin E. y B. Shekhtman, *Two problems on interpolation*. Research problems, J. Approx. Theory, **11** (1995), 513-515.

[148] Levin A. L., V. V. Maimeskul y E. B. Saff, *Rational approximation with locally geometric rates*, J. Approx. Theory, **92** (1998), 308-330.

[149] Loeb H. L., *A Note on optimal integration in H^∞*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **27**, Nº 5 (1974), 615-618.

[150] Loeb H. L. y H. Werner, *Optimal numerical quadrature in H^p spaces*, Math. Z., **138** (1974), 111-117.

[151] López Lagomasino G., *Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes type*, Mat. Sb., **107** (149) (1978); [traducido al inglés en: Math. USSR Sb., **35** (3) (1979), 363-376.]

[152] López Lagomasino G., *On the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*, Mat. Sb., **111** (153) (1981), 308-316; [traducido al inglés en: Math. USSR-Sb., **39** (1981), 281-288.]

[153] López Lagomasino G., *On the moment problem and the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory'81, Sofia, (1983), 419-424.

[154] López Lagomasino G., *On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and the convergence of multipoint Padé approximants*, Mat. Sb., **128** (1985); [traducido al inglés en: Math USSR Sb., **56** (1987), 216-229.]

[155] López Lagomasino G., *Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials*, Mat. Sb., **136** (178), (1988), 46-66; [traducido al inglés en: Math. USSR-Sb., **64** (1989), 207-227.]

[156] López Lagomasino G., *Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures*, Constr. Approx., **5** (1989), 199-219.

[157] López Lagomasino G. y A. Martínez Finkelshtein, *Rate of convergence of two-point Padé approximants and logarithmic asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials*, Constr. Approx., **11** (1995), 255-286.

[158] López Lagomasino G. y A. Ribalta Stanford, *Approximation of transfer functions of infinite dimensional dynamical systems by rational interpolants with prescribed poles*, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 147-168.

[159] Lorentz G. G., M v. Golitschek y Yuly Makovoz, *Constructive Approximation, Advanced Problems*, (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 304. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996).

[160] Lubinski, D.S., *Divergence of complex rational approximations*, Pacific J. Math. **108** (1983), 141-153.

[161] Magnus A., *Rate of convergence of sequences of Padé-type approximants and pole detection in the complex plane*, (Institut de Mathematique Pure et Applique Universite Catholique de Louvain, 1980).

[162] Markov A.A., *Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues*, Acta Math., **19** (1895), 93-104.

[163] Markushevich A., *Teoría de las funciones Analíticas*, (Tomos I,II, Editorial Mir, Moscú, 1970).

[164] Melnik K.N. y Melnik R.V.N., *Optimal-by-order quadrature formulae for fast oscillatory functions with inaccurately given a priori information*, J. Comput. Appl. Math. **110** (1999), 45-72.

[165] McCabe J., *Continued fractions associated with two-point Padé approximations*, Approximation Theory III (E. W. Cheney ed.), Academic Press, New York (1980).

[166] Mills, T. M. y Simon J. Smith, *A note on the Newton-Cotes integration formula*, J. Approx. Theory, **66** (1991), 98-105.

[167] Min, G., *Lagrange interpolation and quadrature formula in rational systems*, J. Approx. Theory, **95** (1998), 123-145.

[168] Min, G., *On the denseness of rational systems*, J. Approx. Theory **98** (1999), 197-202.

[169] Monegato G., *Stieltjes polynomials and related quadrature rules*, SIAM Rev. **24**, 2 (1982), 137-158.

[170] Monegato G. y L. Scuderi, *Numerical integration of functions with boundary singularities*, J. Comput. Appl. Math. **112** (1999), 201-214.

[171] Nettel, S., *Wave Physics*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg,1995).

[172] Newman D. J., *Rational approximation to* $|x|$, Michigan Math. J., **11** MR 30 # 1344 (1964), 11-14.

[173] Newman D. J., *Approximation with rational functions*, (Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1978).

[174] Newman D. J., *Quadrature formulae for* H^p *functions*, Math Z. **166** (1979), 111-115.

[175] Newman D. J., *Polynomials and rational functions*, In: Approximation Theory and Applications (Proc. Workshop, Technion-Israel Inst. Tech., Haifa, 1980), New York: Academic Press (1981), 265-282.

[176] Njåstad O., *Multipoint Padé approximation and orthogonal rational functions*, Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation (A. Cuyt ed.) D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1988.

[177] Nikishin E.M. y V.N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Amer. Math. Soc. Transl., 1991.

[178] Nikolskii S. M., *To the question of estimations of approximation with quadrature formulas*, Uspekhi Math. Nauk, Vol II (36) (1950), 165-177 (en ruso).

[179] Nikolski S. M., *Fórmulas de Cuadratura*, (Editorial Mir, Moscú. Traducción al español de K.P. Medkov, 1990).

[180] Nishishiraho T., *Zygmund type results for the best approximation in Banach spaces*, RIMS Kokyuroku, **1031** (1998), 58-67.

[181] Novak E. y K. Ritter, *Simple cubature formulas with high polynomial exactness*, Constr.Approx. **15** (1999), 499-522.

[182] Nuttall J. y C. J. Wherry, *Gaussian integration for complex weight functions*, J. Inst. Math. Appl., **21** (1978), 165-170.

[183] Petras K., *Gaussian versus optimal integration of analytic functions*, Constr. Approx. **14** (1998), 231-245.

[184] Petrushev P. P., *Relación entre la mejor aproximación racional y por splines en la métrica de* L^p, Pliska, **5** (1983), 68-83 (en ruso).

[185] Popov V. A., *On the connection between rational and spline approximation*, C. R. Acad. Bulgare Sci., **27**, N° 5 (1974), 63-66.

[186] Popov V. A., *Uniform rational approximation of the class* V^r *and its applications*, Acta Math. Hungar., **29** (1-2) (1977), 119-129.

[187] Popov V. A., *On the connection between rational uniform approximation and polynomial* L^p *approximation of functions*, (Quantitative Approximation of Functions, Academic Press, Inc. 1980).

[188] Popov V. A., *On the one-sided approximation of functions*, Proc. Internat. Conf. Constr. Function Theory, Sofia (1980), 465-468.

[189] Popov V. A. y Bl. Sendov, *On the function approximation by splines and rational functions*, Proc. Internat. Conf. Constr. Function Theory, Varna (1970), 89-94.

[190] Popov V. A. y J. Szabados, *A remark on the rational approximation of functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci., **28**, Nº 10 (1975), 1303-1306.

[191] Popov V. A. y P. P. Petrushev, *The exact order of the best uniform approximation of convex functions by rational functions*, Math. Sb., **103**(145) (1977), 285-292.

[192] Popov V. A. y P. P. Petrushev, *Rational Approximation of Real Variable Functions*, (Cambridge Univ. Press, 1986).

[193] Porter D. y Stirling D. S. G., *Integral Equations. A Practical Treatment, from Espectral Theory to Applications*, (Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1990).

[194] Prévost M., *A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67** (2) (1996), 219-235.

[195] Proinov P. D., *Uniformly distributed matrices and numerical integration*, Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions, Varna (1984), 704-709.

[196] Prokhorov V. A., *On Chebyshev rational approximations of analytic functions*, Dokl. Akad. Nauk, **276** (1984), 1321-1324; [traducido al inglés en: Soviet Math. Dokl., **29** (1984).]

[197] Prokhorov V. A. y Saff E. B., *Rates of best uniform rational approximation of analytic functions by ray sequences of rational functions.*, Constr. Approx. **15** (1999), 155-173.

[198] Radwan Al-Jarrah, *Error estimates for Gauss-Jacobi quadrature formulae with weights having the whole real line as their support*, J. Approx. Theory, **30**, (4) (1980), 309-314.

[199] Radwan Al-Jarrah, *An error estimate for Gauss-Jacobi quadrature formula with the Hermite weight $w(x) = \exp(-x^2)$.*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **33** (47) (1983), 17-22.

[200] Radwan Al-Jarrah, *Error estimates for Gauss-Jacobi quadrature formulae with special weights*, Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues, **9**, Nº 1 (1984), 33-38.

[201] Raina B. L., *On certain optimal cubature formulae*, Math. Japon., **30** Nº 3 (1985), 307-315.

[202] Richter N., *Properties of minimal integration rules*, SIAM J. Numer. Anal., **7**, Nº 1, (1970), 67-79.

[203] Richter N., *Properties of minimal integration rules II*, SIAM J. Numer. Anal., **8**, Nº 3, (1971), 497-508.

[204] Richter N., *Minimal interpolation and approximation in Hilbert spaces*, SIAM J. Numer. Anal., **8**, Nº 3, (1971), 583-597.

[205] Rivlin T. J., An Introduction to the Approximation of Functions, (Dover Publication, Inc. New York, 1981).

[206] Robertson A. P. y W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, (Cambridge University Press, 1966).

[207] Runge C., *Über empirische funktionen und die interpolation zwischen aquidistanten ordinaten*, Z. Angew. Math. Phys., **46** (1901), 224-243.

[208] Saff E. B., *A principle of contamination in best polynomial approximation*, Lecture Notes in Math., **1354**, "In Approximation and Optimization, (A. Gómez et al Ed.), Springer Verlag, Berlín, 1987, 79-97.

[209] Saff E. B. y H. Stahl, *Asymptotic distribution of poles and zeros of best rational approximants to* x^α *on* $[0,1]$, en "Topics in Complex Analysis", Banach Center Publications, **31**, Institute of Mathematics of the Polish Academy of Warsaw, 1995.

[210] Santos-León J.C., *Asymptotic expansions for trapezoidal type product integration rules*, J. Comput. Appl. Math. **91** (1998), 219-230.

[211] Sard A., *Best approximate integration formulas*, Amer. J. Math., LXXI, Nº 1 (1949), 80-91.

[212] Shekhtman, B., *Another note on polynomial vs. rational approximation*, J. Approx. Theory, **85** (1996), 343-347.

[213] Shi Y. G., *On the fine and rough theory of Lagrange type interpolation of higher order*, J. Approx. Theory **102** (2000), 325-340.

[214] Shi Y. G., *Convergence of Gaussian quadrature formulas*, J. Approx. Theory, **105**, (2000), 279-291.

[215] Shohat J. A. y J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, (Mathematical Surveys, Nº 1, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1970).

[216] Singer I., *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971)

[217] Stahl H., *On the divergence of certain Padé approximant and the behaviour of the associated orthogonal polynomials*, Lecture Notes in Math., **1171**, Springer Verlag (1985), 321-330.

[218] Stahl H., *On the convergence of generalized Padé approximants*, Constr. Approx. **5** (1989), 221-240.

[219] Stahl H., *Best rational approximants of* $|x|$ *on* $[-1,1]$, Mat. Sb., **183** (1992), 85-118.

[220] Stenger F., *Polynomial, sinc and rational function methods for approximating analytic functions*, Lecture Notes in Math. **1105**, Rational Approximation and Interpolation, Proc., Tampa, Fla. (1983), 49-72

[221] Stieltjes T. J., *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **1**, (1884), 409-426

[222] Stieltjes T. J., *Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **99** (1884), 850-851.

[223] Szabados J., *Rational approximation in certain classes of functions*, Acta Math. Hungar., **19** (1-2) (1968), 81-85.

[224] Szabados J., *Rational approximation of analytic functions with finite number of singularities on the Real Axis*, Acta. Math. Hungar., **20** (1-2), (1969), 159-167.

[225] Szabados J., *Rational approximation to analytic functions with finite number of singularities on the real axis, II*, en "Proc. Internat. Conf. Constr. Theory of Functions, Budapest, 1969,"(1972), 467-474.

[226] Szabados J., *On the order of magnitude of fundamental polynomials of Hermite interpolation*, Acta Math. Hugar. **61** (3-4) (1993), 357-368.

[227] Szabó, B. e I. Babuška, *Finite element analysis*, Wiley Interscience. New York, 1991.

[228] Szëgo G., *Orthogonal Polynomials*, (Colloquium Publications of the American Mathematical Society, **23**, 1939).

[229] Szüsz P. y P. Turán, *On the Constructive Theory of functions*, III. MTA Osztály Közleményei, **16** (1966), 33-45.

[230] Thron W. J., *Two-point Padé tables, T-Fractions and sequences of Schur*, In Padé and Rational Approximation. Theory and Applications (E. B. Saff, R. S. Varga, Ed.) Academic Press, Inc. New York, San Francisco, London (1977), 215-226.

[231] Timan A. F., *Theory of approximation of functions of a real variable*, (Pergamon Press, New York, 1963).

[232] Tokarzewski S., *Two-point Padé approximants for the expansions of Stieltjes functions in real domain*, J. Comput. Appl. Math. **67** (1) (1996), 59-72.

[233] Tschakalov L., *Generalization of one theorem of Mercer for convergence*, Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst., **1** (2) (1954) (en búlgaro).

[234] Tzimbalario J., *Rational approximation to* x^{α}, J. Approx. Theory, **16** (1976), 187-193.

[235] Turán P., *On the approximation of piecewise analytic functions by rational functions*, Actas de la Conferencia Internacional de la Teoría de Funciones Analíticas, Erevan, (1965) (en ruso).

[236] Van Assche W. y I. Vanherwegen, *Quadrature formulas based on rational interpolation*, Math. Comput., **61**, (204) (1993), 765-783.

[237] Van Wickeren E., *Direct and inverse theorems for Bernstein polynomials in the space of Riemann integrable functions*, Constr. Approx. **5** (1989), 189-198.

[238] Verlinden P., *Acceleration of Gauss-Legendre quadrature for an integrand with an endpoint singularity*, J. Comput. Appl. Math. **77** (1-2) (1997), 277-287.

[239] Vyacheslavov N. S., *On the approximation of* $|x|$ *by rational functions*, Dokl. Akad. Nauk., **220** (1975); [traducido al inglés en: Soviet Math. Dokl., **16** (1975), 100-104.]

[240] Wallin, H., *The convergence of Padé approximants and the size of the power series coefficients*, Appl. Anal., **4** (1974), 235-251.

[241] Walsh J. L., *The existence of rational functions of best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), 668-689.

[242] Walsh J. L., *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, 5th ed., Coll. Publ. XX. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1969).

[243] Widom H., *Rational approximation and n-dimensional diameter*, J. Approx. Theory, **5** (1972), 343-361.

[244] Wilderotter K., *An asymptotically optimal algorithm for approximating bounded analytic functions*, Numer. Math **75** (1997), 397-404.

[245] Wuytack L., *Commented bibliography on techniques for computing Padé approximation and its applications*, in Padé approximation and its applications (L. Wuytack, ed.), Springer- Verlag, Berlín and New York (1979), 375.

[246] Zi Cai Li, *Numerical methods for elliptic problems with singularities*, World Scientific Publishing, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, (1990).

[247] Zolotarev E. I., *Collected Works*, Vol. II, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow (1932).

Índice de símbolos